



$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



Pythagore et la complétude

« Ah, mes amis, il nous faut surmonter même les Grecs ! »

NIETZSCHE

Je vais m'attaquer ici à un classique plein de nostalgie, en généralisant via quelques préliminaires algébriques, le bon vieux théorème de Pythagore, que nos parents et les parents de nos parents ont aussi connu, et dont nous parlerons à nos enfants et petits enfants.

L'espace \mathbb{R}^n est muni de la norme et du produit scalaire euclidiens usuels, notés $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si Q_j est une matrice symétrique d'ordre n , on note aussi Q_j l'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont la matrice est Q_j dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Si $x' = (x_1 x_2 \dots x_n)$, on note $q_j(x) = x' Q_j x = \langle x, Q_j x \rangle$ la forme quadratique associée à Q_j .

Soient Q_1, \dots, Q_p des matrices symétriques d'ordre n , de rangs respectifs r_1, \dots, r_p , telles que $I_n = Q_1 + \dots + Q_p$ ie. Pour tout x de \mathbb{R}^n : $x'x = \|x\|^2 = q_1(x) + \dots + q_p(x)$.

α) _ Montrer que si $r_1 + \dots + r_p \leq n$, alors $r_1 + \dots + r_p = n$ et il existe une base

orthonormée de \mathbb{R}^n , (e_{jk}) , $j = 1, \dots, p$; $k = 1, \dots, r_j$ telle que $q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{jk} \rangle^2$.

β) _ Réciproquement, montrer que s'il existe une telle base, on a $r_1 + \dots + r_p = n$.





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



Application aux vecteurs gaussiens

Soient $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ des *v.a.r.* indépendantes de loi $N(m_i, 1)$, M le vecteur $(m_1, \dots, m_n)'$, X le vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_n)'$ de loi $N_n(M, I_n)$.

$\delta)$ _ Montrer que si $r_1 + \dots + r_p \leq n$, alors les *v.a.r.* $q_j(X) = X' Q_j X$, $j = 1, \dots, p$, sont des *v.a.* indépendantes de loi $X'^2(r_j, \lambda_j)$, où le paramètre de non-centralité est :

$$\lambda_j = q_j(M) = M' Q_j M.$$

$\gamma)$ _ Réciproquement, montrer que si les *v.a.* $q_j(X)$, $j = 1, \dots, p$, sont des *v.a.* indépendantes de loi $X'^2(r_j, \lambda_j)$, alors $n = r_1 + \dots + r_p$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = \|M\|^2$.





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



Ma Solution

$\alpha)$ _ Par hypothèse, $\sum_{j=1}^p r_j \leq n$ et $I_n = Q_1 + \dots + Q_p$.

Notons $V_j = Q_j(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel image de \mathbb{R}^n par l'application linéaire de matrice Q_j (dans la base canonique).

Alors $V_1 + V_2 + \dots + V_p$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\leq n$.

Mais tout x de \mathbb{R}^n peut s'écrire : $x = Q_1(x) + \dots + Q_p(x)$ et par conséquent

$V_1 + V_2 + \dots + V_p = \mathbb{R}^n$, $\dim(V_1 + V_2 + \dots + V_p) = n$ d'où $\sum_{j=1}^n r_j = n$, et la somme des

sous-espaces V_j est directe (sinon $\dim(V_1 + V_2 + \dots + V_p) < \sum_{j=1}^p \dim V_j$).

Soit $x \in V_j$; dans la décomposition : $x = Q_1(x) + \dots + Q_j(x) + \dots + Q_p(x)$, on a x et $Q_j(x)$ dans V_j , d'où par unicité $Q_j(x) = x$. Ainsi $Q_j Q_j = Q_j$, et comme Q_j est symétrique, Q_j est projecteur.

De plus si $x \in \mathbb{R}^n$, de $x = Q_1(x) + \dots + Q_j(x) + \dots + Q_p(x)$ on déduit :

$$Q_j(x) = Q_j Q_1(x) + \dots + Q_j Q_p(x)$$

Et en vertu de l'unicité et de $Q_j Q_j = Q_j$ on a $Q_j Q_k = 0$ pour tout $k \neq j$. Par conséquent les sous-espaces sont orthogonaux. On peut donc trouver une base





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



orthonormale de \mathbb{R}^n , en réunissant des bases orthonormées e_{j_1}, \dots, e_{j_r} de chaque

sous-espace V_j . Dans cette base, on a alors $Q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{j_k} \rangle e_{j_k}$ et

$$q_j(x) = \langle x, Q_j(x) \rangle = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{j_k} \rangle^2 \text{ ainsi que } x'x = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{j_k} \rangle^2.$$

La relation $\sum_{j=1}^p r_j = n$ implique en particulier que les formes quadratiques $q_j(x)$ sont définies positives.

β) _ Si une telle base existe, $q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{j_k} \rangle^2$, et comme $x = \sum_{j,k} \langle x, e_{j_k} \rangle e_{j_k}$, on a par

hypothèse : $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{j_k} \rangle^2 = \sum_{j=1}^p q_j(x)$ et $r_1 + \dots + r_p = n$.

δ) _ Si $r_1 + \dots + r_p \leq n$, on sait d'après α) _ que $r_1 + \dots + r_p = n$. Soit (e_{j_k}) la base orthonormée définie au α) _.

Soit (Y_{j_k}) les composantes du vecteur X dans cette base. Le vecteur $Y = (Y_{j_k})$ est encore un vecteur gaussien dont les composantes sont indépendantes, et puisque

$Y_{j_k} = \langle X, e_{j_k} \rangle$, on a $E(Y_{j_k}) = \langle M, e_{j_k} \rangle$.





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



Par construction de la base (e_{jk}) , on a : $q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} Y_{jk}^2$ pour $j = 1, \dots, p$.

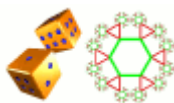
Les v.a. $q_j(x)$ sont donc indépendantes, puisque les Y_{jk} le sont, de loi $X^2(r_j, \lambda_j)$ avec :

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{r_j} (E(Y_{jk}))^2 = \sum_{k=1}^{r_j} \langle M, e_{jk} \rangle^2 = q_j(M).$$

$\gamma)$ L'hypothèse entraîne que $\sum_{j=1}^p q_j(x)$ suit une loi de $X^2(n, \|M\|^2)$, on a

nécessairement : $n = \sum_{j=1}^p r_j$ et $\|M\|^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j$.

Quod erat demonstrandum, as Latinists like to say.





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



« Il y a une atmosphère des idées. »

HONORÉ DE BALZAC

L'avantage de donner des colles chez les taupins, c'est qu'on peut de temps en temps, faire du hors piste.

Tout le monde connaît le théorème qui dit que : Si E est un espace vectoriel normé complet, la convergence absolue, (d'une série) implique la convergence.

Car soit la série absolument convergente, de terme général u_n . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall q \geq n_0, \forall p \geq q, \|u_q\| + \|u_{q+1}\| + \dots + \|u_p\| \leq \varepsilon,$$

(Critère de Cauchy dans \mathbb{R} pour la série des $\|u_n\|$), d'où *a fortiori*, on a

$$\forall q \geq n_0, \forall p \geq q, \|u_q\| + \|u_{q+1}\| + \dots + \|u_p\| \leq \varepsilon$$

(Inégalité triangulaire) : le critère de Cauchy appliqué cette fois à la série des u_n dans E complet permet de conclure.

La réciproque est fautive : une série peut être convergente sans l'être absolument, comme le montre le cas de la série dite harmonique de terme général réel $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On a $|u_n| = \frac{1}{n+1}$, c'est le terme d'une série divergente, mais elle est convergente (c'est un classique).

Remarque _ Si E n'est pas complet, une série peut être absolument convergente sans être convergente.





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



Chaque fois que l'on veut un espace vectoriel normé non complet, il faut passer à la dimension infinie, (\mathbb{R}^n étant toujours complet) et on sait que $E = \mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet.

On prend donc $E = \mathbb{R}[X]$, normé par la norme infinie : si $P(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$, (les a_n étant

presque tous nuls), on pose $\|P\|_\infty = \sup \{|a_n|, n \in \mathbb{N}\}$, (existe car le cardinal de l'ensemble des n tels que $a_n \neq 0$ est fini) ;

Soit $u_n = \frac{X^n}{2^n}$, on a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$: la série des u_n diverge dans E , car si le polynôme

P était somme de la série des u_n , en notant $P = \sum_{n=0}^{P_0} a_n X^n$, ($P_0 = 0$ ou degré de P), pour

tout $n > P_0$, le polynôme $U_n - P$ a son terme de degré $P_0 + 1$ de coefficient non nul,

égal à $\frac{1}{2^{P_0+1}}$ donc $\|U_n - P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{P_0+1}}$, (avec $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$).

Mais alors,

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2^{P_0+1}}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0,$$

tel que $\|U_n - P\|_\infty \geq \varepsilon$ (il suffit de prendre $n \geq P_0 + 1$ en fait), ceci nie le fait que la suite des sommes partielles U_n converge vers P .



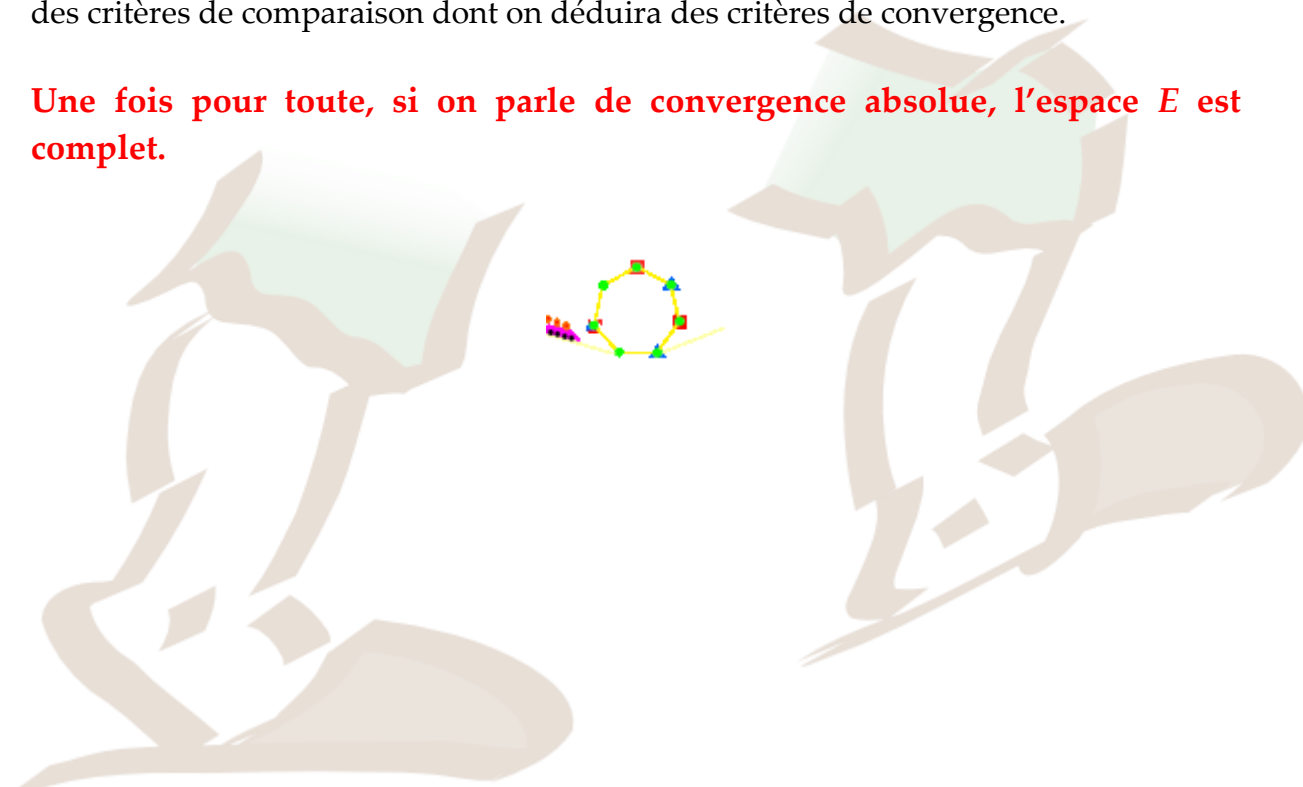


$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



Attention donc sur les espaces non complets à ne pas conclure trop vite, d'autant plus que dans l'esprit de votre programme, vous serez pratiquement toujours amenés à chercher la convergence absolue, non par masochisme, mais parce la structure d'ordre sur \mathbb{R} va nous permettre, pour les séries à termes positifs, d'établir des critères de comparaison dont on déduira des critères de convergence.

Une fois pour toute, si on parle de convergence absolue, l'espace E est complet.





$$\cos \frac{2\pi}{5}$$



L'enseignement est un noviciat, n'est-ce-pas... Un noviciat perpétuel...

Mes chers collègues du Lycée Cézanne, je me suis efforcé de rédiger ces notes pour mes étudiants, en pensant à leurs réactions, qui figurent les miennes, face à une question ardue. Mais j'ai aussi voulu, vous livrer cette modeste production, dans l'attente de vos impressions, même si jusqu'à lors, la communication est plutôt à sens unique. Loin de moi l'idée d'éblouir quiconque, l'enseignement est un noviciat, n'est-ce-pas... Un noviciat perpétuel... Et il n'y a pas en ces matières de « leçons à donner, pas du moins en ce qui me concerne.

Il est réjouissant de se rappeler tout ce sur quoi j'avais réfléchi antérieurement. En fait n'exagérons rien, j'essaie tout simplement de dire que, certains théorèmes sont tellement imprimés en moi que je pourrais presque les démontrer en rêve. Il faut aussi l'avouer, d'autres ont toujours revêtu à mes yeux une certaine difficulté, si bien que j'ai besoin de l'exposer à moi-même avant mes cours aux étudiants.

Un cours doit se développer et se modifier avec le temps, et non rester le même. La concomitance de l'enseignement et de la recherche est à cela un remarquable remède. La recherche alimente le cours en données nouvelles et lui permet d'évoluer en fonction des modifications de la science elle-même. Cette manière de m'exposer, peut-être une occasion de transformer mes cours.

Entre collègues, il est nécessaire de trouver des sujets à débattre. J'aime dans tous les cas, penser qu'il est possible de vivre une aventure qui, de facto, sinon de jure, nous mène à traverser les disciplines, à faire des voyages dans le savoir.

