La Mathématique reste soumise à une «lecture bien faite»

Voici l'exposé de quelques concepts d'Algèbre, qui ouvre sur d'autres concepts, qui donne, ainsi qu'on le dit d'une fenêtre, sur bien d'autres, qui, à leur tour, débouchent sur des théories qu'il n'avait été nullement prévu d'évoquer, comme il en va lorsqu'on cherche un mot dans le dictionnaire qui fait rebondir d'article en article, — et s'y égarer. On est entré dans un labyrinthe dont on ne trouvera pas l'issue. Mais existe-t-elle ? Sort-on jamais d'un article une fois commencé ? Derrière celui-ci, en somme, se cache une bibliothèque : voilà un merveilleux paradoxe dont il ne convient pourtant pas de s'étonner, d'autant plus que la Mathématique ressemble à un kaléidoscope où se composent et recomposent sans cesse de nouvelles images, combinant depuis toujours les mêmes débris de verres colorés, et rénovés.

Cette bibliothèque est celle d'un amateur. Dans la salle de lecture de celle que constitue celui-ci, on peut croiser, entre autres, les espaces hermitiens complexes, le groupe unitaire et le groupe des rotations… On s'interrogera sur la caractérisation des classes de conjugaison du groupe des rotations… On s'intéressera aux sous-groupes distingués… De temps en temps, les concepts de – trace, d'argument, d'homomorphisme, d'isomorphisme, d'endomorphisme, de conjugaison, de surjection, d'injection, de noyau, de déterminant, d'homothétie, de simplicité, d'engendrement, d'isométrie, de dilatation, de symétrie hyperplanes… s'inviterons à notre dialogue, et y formeront une petite communauté provisoire. Chacun de ces concepts singuliers vient là pour des raisons diverses : pour nous obliger à voyager, dénombrer, rêver ou encore interpréter. Ce sont mes compagnons de route.

À les énumérer ainsi, on peut se demander s'ils forment une communauté, tant ils sont dissemblables, mais convient-il de s'en affliger ? Les différences et les différends ne sont-ils pas susceptibles de provoquer quelque illumination ? Au reste, n'est-ce pas leur disparate qui permet de les réunir et de constituer ce petit cercle, un cercle doté de cette étrange propriété : il ne compte que des singuliers. Tel est leur seul laissez-passer.

Quel étudiant des Classes Préparatoires françaises ou des trois premières années universitaires des pays de l'O.C.D.E., peut se flatter de tout connaître sur la théorie du groupe unitaire ? Chaque relecture nous en propose un aspect inconnu. L'approfondissement est parfois un renouvellement, parfois une révolution dans notre perception de cette théorie.

De quelles définitions, de quelles propositions, de quels lemmes bâtir les ponts pour qu'ils puissent unir ces différents concepts ? Je vous propose d'ouvrir la question de cette méthode, mot qui désigne une route qui passe à travers, exactement une traversée. Partie d'un lieu familier, elle nous conduira vers un autre, inconnu ; elle ''pontera'' le problème avec sa solution, le savoir à l'ignorance, la recherche et l'invention. Nous verrons que par sa traversée, le pont, inversement, symbolise et réalise une méthode. Le trait d'union fait plus que traduire cette conversion, il la ponte, il fait tenir ensemble ces altérités. Je ne sais s'il convertit, traduit, transmute ou transsubstantie, reste que sa matière, sa substance – matrices diagonalisables ou bases orthonormales –, s'adapte à des rivages sans rapport apparent. Autant dans le trait qui lie le groupe unitaire et le groupe des rotations que dans le tablier qui rapproche ces deux rives, je soupçonne de l'universel. J'aime cette ouverture, cette multiplicité des choses : incessant battement d'avènements, amorces, émergences, éclosions perpétuelles.

Je vous ai déjà présenté plus haut, mes compagnons de route… Je retrouve avec eux des expériences singulières : dans l'érotisation du savoir et dans celui de la conviction dans le domaine de l'enseignement, autrement dit dans la transmission d'une technique de raisonnement. J'ose parier sur la culture mathématique et sur la méthode à refonder, je découvre un destin de la recherche en Algèbre, à savoir : sans pont donc, pas de chemin ; entendez par là de connexion d'un point à un autre, tout autre. Sans pont donc, pas de méthode ; entendez par elle, un chemin de même à l'autre…

Comme la perception nietzschéenne, mon intuition cherche, outre l'étude des endomorphismes unitaires et la *simplicité* du groupe des rotations, par la découverte du lien qui attache les deux versants de ces concepts, à pénétrer dans l'existence de la réalité, la seule réalité possible que j'essaie de rendre sensible.
Analogie, fusion : je ne me contente pas seulement d'analyser des processus poétiques, mais, j'essaie aussi, de comprendre, c'est-à-dire de saisir, au passage des concepts, l'unité de pensée qui s'élève bien au-delà des différences apparentes pour franchir le seuil où la démonstration abolit la distance.

Un exposé sur les Vérités découvertes par l'art de développer avec rigueur un raisonnement, en appliquant des règles explicitées et considérées comme admises ? Oui, sans doute, mais aussi, une expérience de cette méthode scandée par des événements, des étonnements, rebonds de surprises et de renaissances. Je déplie des vérités *hic* et *nunc* telles que je les vis et les pense. J'invite le lecteur à découvrir, ce travail sur la mise-en-scène des configurations nouvelles qui se développent dans le cadre plus restreint des espaces hermitiens complexes. On peut y voir, la fabrication de l'éclairage, de l'espace imaginaire à l'intérieur duquel le relief de ce que je décris doit être perçu.

Quelques idées simples sur le Groupe Unitaire en Algèbre

I – Introduction.

L'objet d cet article est l'étude des endomorphismes unitaires de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$. Pour les définir, nous commencerons par munir $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien canonique noté $< *, * >$ si $\begin{cases} u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \\ \& \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \end{cases}$ alors $< u, v > = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$ et de la norme hermitienne associée définie par $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$ étant entendu que $< u, u > \in \mathbb{R}^+$ pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. Nous dirons qu'un endomorphisme f est unitaire s'il conserve la norme, c'est-à-dire si, quel que soit $u \in \mathbb{C}^n$, $\|f(u)\| = \|u\|$. L'ensemble des endomorphismes unitaires muni de la composition des endomorphismes est un groupe noté $\mathrm{U}(n)$ et appelé « le groupe unitaire ». Ce groupe contient un sous-groupe particulier $\mathrm{SU}(n) = \{f \in \mathrm{U}(n) \,;\, \det f = 1\}$.

Par analogie avec le cas « réel », nous dirons que ce group est le groupe des rotations de $\mathbb{C}^n$, et qu'une rotation plane de $\mathbb{C}^n$ est une rotation pour laquelle il existe un sous-espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$ tel que la restriction de f à $\mathrm{E}^{\perp}$ est l'identité.

Par ailleurs, j'utiliserai dans cet article le fait que tout endomorphisme unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont toutes de module 1. Pour des raisons pratiques, j'identifierai un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec une matrice dans la base canonique. Ainsi, en utilisant les formules de changement de variable, l'énoncé précédent devient

$$\forall\, u \in \mathrm{U}(n),\ \exists p \in \mathrm{U}(n) /\ p^{-1}up = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & (0) \\ & e^{i\theta_2} & \\ (0) & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \text{ avec } (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi[^n.$$

Dans un premier temps, nous commencerons par une étude approfondie des rotations de $\mathbb{C}^2$. Elle permettra, entre autres, d'établir un lien entre SU(2) et SO(3) (SO(3) étant le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$) et de retrouver que SO(3) est simple. Puis, dans un deuxième temps, nous verrons que l'application « déterminant » permet de classer tous les sous-groupes distingués de U(n). Cela permettra de résoudre un problème ouvert par DIEUDONNÉ dans son ouvrage, *Sur les groupes classiques.* Il sera ici résolu dans le cadre plus restreint des espaces hermitiens complexes. L'ouvrage de R. MNEIMNÉ et F. TESTARD (*Groupes* de *Lie classiques*, Hermann) pourra être utilement consulté.

II – Engendrement de SU(2)

1° – Caractérisation des classes de conjugaison de SU(2).

Soient r et r' deux rotations de $\mathbb{C}^2$. Nous savons que si r et r' sont conjuguées elles ont même trace. Dans le cas des éléments de SU(2), la réciproque est vraie. En effet, soit t la trace commune de r et r', le polynôme caractéristique de r et r' est alors $\chi^2 - t\chi + 1$. Donc, r et r' ont mêmes valeurs propres : $\dfrac{t + i\sqrt{4-t^2}}{2}$ et $\dfrac{t - i\sqrt{4-t^2}}{2}$ ($4 - t^2 \geq 0$ car $-2 \leq t \leq 2$). Elles sont donc toutes deux conjuguées de

$$\begin{pmatrix} \dfrac{t + i\sqrt{4-t^2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{t - i\sqrt{4-t^2}}{2} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc :

Proposition 1 – *La trace caractérise les classes de conjugaison de* SU(2).

Par la suite, si $r \in \mathrm{SU}(2)$ et si $t = \mathrm{tr}\, r$, nous dirons que $\theta = \arccos \frac{t}{2}$ est l'argument de r et nous le noterons $\theta = \arg r$. Remarquons alors que les valeurs propres de r sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. D'autre part, la fonction $\begin{cases} [-2, 2] \longrightarrow [0, \pi] \\ t \longmapsto \arccos \frac{t}{2} \end{cases}$ est bijective, donc nous avons la proposition suivante :

Proposition 2 – *L'argument caractérise les classes de conjugaison de* SU(2).

Nous allons maintenant donner une équation de ces classes de conjugaison.

Soit $\theta \in [0, \pi]$ et $r \in \mathrm{SU}(2)$ d'argument θ. Rappelons que toute rotation de $\mathbb{C}^2$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $|a|^2 = 1$. Posons donc $r = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$. Comme $\theta = \arg r$, on a $\mathrm{tr}\, r = 2\cos\theta$ donc $a + \bar{a} = 2\cos\theta$, soit $\mathcal{Re}\, a = \cos\theta$ ($\mathcal{Re}\, a$ désigne la partie réelle de a).

Donc finalement, en posant $a = \cos\theta + ix$, $b = y + iz$, nous avons

$$r = \begin{pmatrix} \cos\theta + ix & -y + iz \\ y + iz & \cos\theta - ix \end{pmatrix}$$

et la relation $|a|^2 + |b|^2 = 1$ devient $x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2\theta$.

Réciproquement, une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta + ix & -y+iz \\ y+iz & \cos\theta - ix \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2\theta$ appartenant à SU(2), a pour trace $2\cos\theta$ et donc pour argument θ. Ainsi nous avons la proposition suivante :

Proposition 3 – *La classe de conjugaison d'argument* $\theta \in [0, \pi]$ *de* SU(2) *est l'ensemble des rotations de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta + ix & -y+iz \\ y+iz & \cos\theta - ix \end{pmatrix}$ *avec* $x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2\theta$.

Notations.

* Nous noterons S_θ la classe de conjugaison d'argument θ.

* Nous noterons $\cos\theta + u\sin\theta$ avec $u \in S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 / \|v\| = 1\}$ la rotation d'argument θ définie par $\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} ix & -y+iz \\ y+iz & -ix \end{pmatrix}$ où $u = (x, y, z)$. En d'autres termes, u représentera la rotation $\begin{pmatrix} ix & -y+iz \\ y+iz & -ix \end{pmatrix} \in S_{\pi/2}$. Ceci permet d'identifier S^2 à $S_{\pi/2}$.

Quelques remarques : _ Si $u, v \in S^2$ (ou $S_{\pi/2}$) alors $uv = -\langle u, v\rangle - u \wedge v$ où $\langle u, v\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ de u par v et $u \wedge v$ le produit vectoriel. Pour le voir, il suffit de calculer :

$$\begin{pmatrix} ix & -y+iz \\ y+iz & -ix \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix' & -y'+iz' \\ y'+iz' & -ix' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -xx' - yy' - zz' + i(zy' - z'y) & x'z - z'x + i(x'y - y'x) \\ -x'z + z'x + i(x'y - y'x) & -xx' - yy' - zz' - i(zy' - z'y) \end{pmatrix}$$

où $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$.

Cette notation est à rapprocher de la notation complexe $\cos\theta + i \sin\theta$. De la même manière que $i^2 = -1$, on a $u^2 = -< u, u > - u \wedge u = -1$ pour tout $u \in S^2$.

Notation _ Si $r = \cos\theta + u \sin\theta$, nous dirons que $\cos\theta$ est la partie réelle de r.

2° produit de deux éléments de $S_\theta(\theta \in [0, \pi])$.

Soient $r_1, r_2 \in S_\theta$.

$$\begin{cases} \text{Posons } r_1 = \cos\theta + u\sin\theta \quad (\text{avec } u \in S^2) \\ \& \\ r_2 = \cos\theta + v\sin\theta \quad (\text{avec } v \in S^2) \end{cases}.$$

Nous avons alors :

$$r_1 r_2 = (\cos\theta + u\sin\theta)(\cos\theta + v\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1 r_2 = \cos^2\theta + v\cos\theta\sin\theta + u\sin\theta\cos\theta + uv\sin^2\theta.$$

$$= \cos^2\theta - < u, v > \sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta\,(u + v) - u \wedge v \sin^2\theta.$$

Donc, la partie réelle de ce produit est

$$\cos^2\theta - < u, v > \sin^2\theta.$$

Or,

lorsque u et v varient dans S^2, $< u, v >$ varie entre -1 et 1, donc $\cos^2\theta - < u, v > \sin^2\theta$ varie dans $[\cos^2\theta - \sin^2\theta\,;\ \cos^2\theta + \sin^2\theta]$, c'est-à-dire dans $[\cos 2\theta, 1]$. Ceci a deux conséquences :

1° _ Le produit de deux éléments de S_θ est un élément dont la partie réelle appartient à $[\cos 2\theta, 1]$.

2° _ Si $\beta \in [\cos 2\theta, 1]$, $\exists\, u$ et $v \in S^2$ / la partie réelle de $(\cos\theta + u \sin\theta)(\cos\theta + v\sin\theta)$ est β.

Nous allons en déduire la proposition suivante.

Proposition 4 – *Un élément r de* S_α *se décompose en produit de deux éléments de* S_θ *si, et seulement si,* $\cos 2\theta \leq \cos\alpha$.

* En effet, si r se décompose en produit de deux éléments de S_θ, d'après 1°, la partie réelle de ce produit appartient à $[\cos 2\theta, 1]$, donc $\cos 2\theta \leq \cos\alpha$.

* si $\cos 2\theta \leq \cos\alpha$, c'est-à-dire si $\cos\alpha \in [\cos 2\theta, 1]$,

d'après 2°,

il existe u, $v \in S^2$ tel que la partie réelle de $(\cos\theta + u\sin\theta)(\cos\theta + v\sin\theta)$ est $\cos\alpha$,

donc $(\cos\theta + u\sin\theta)(\cos\theta + v$ s

Posons $\begin{cases} r_1 = \cos\theta + u\sin\theta \\ \& \\ r_2 = \cos\theta + v\sin\theta \end{cases}$.

Si $r \in S_\alpha$, $r_1 r_2$ et r sont conjuguées.

Il existe donc $p \in SU(2)$ tel que :

$$r = p^{-1}(r_1 r_2)p = (p^{-1} \ldots)(\ldots^{-1} r_2 p),$$

donc r est produit de deux éléments de S_θ : $\begin{cases} p^{-1} r_1 p \\ \text{et} \\ p^{-1} r_2 p \end{cases}$, d'où la proposition 4.

Notations _ Par la suite, nous noterons $e^{u\theta}$ la rotation $\cos\theta + u\sin\theta$ pour $u \in S^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Quelques remarques.

* Nous avons pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $u \in S^2$: $\begin{cases} e^{u(\theta+\theta')} = e^{u\theta} e^{u\theta'} \\ \& \\ e^{-u\theta} = (e^{u\theta})^{-1} \end{cases}$.

* Cette notation est à rapprocher de [illegible] plexe $e^{i\theta}$ qui vérifie aussi :

$$\begin{cases} e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'} \\ \& \\ e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1} \end{cases}$$

* La notation exponentielle peut se justifier en considérant que $u\theta$ est une matrice et en démontrant que l'exponentielle de cette matrice est précisément $\cos\theta + u \sin\theta$.

3° _ Applications.

Proposition 5 _ $S_{\pi/2}$ *engendre* SU(2), *plus précisément tout élément de* SU(2) *est produit de deux éléments de* $S_{\pi/2}$.

Ceci résulte immédiatement de la proposition 4 et du fait que ;

$$\forall\, \theta \in [0, \pi],\ \cos\theta \geq \cos\left(2\,\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Nous avons ainsi démontré que les racines 4ᵉ de l'unité de SU(2) engendrent SU(2). Nous allons maintenant généraliser ce résultat pour $\alpha \in]0, \pi[$, c'est-à-dire montrer que S_α engendre SU(2).

Remarquons que pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, ce résultat est faux car $S_0 = \{id\}$ qui n'engendre que $\{id\}$ et $S_\pi = \{-id\}$ qui n'engendre que $\{id, -id\}$.

Nous allons montrer plus précisément :

Proposition 6 _ *Si* $\alpha \in \,]0, \pi[$, *tout élément de* SU(2) *est produit d'un nombre pair d'élément de* S_α.

* *Premier cas :* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Soit $r \in SU(2)$, posons $\theta = \arg r$. Soit k le plus petit entier positif ou nul tel que

$$0 \leq \theta - 2k\alpha \leq 2\alpha.$$

Ici, $2\alpha < \pi$ et sur $[0, \pi]$ la fonction $x \longmapsto \cos x$ est décroissante, donc :

$$\cos(\theta - 2k\alpha) \geq \cos 2\alpha.$$

Posons par ailleurs, $r = e^{u\theta}$. d'après la proposition 4, il existe donc r_1 et r_2 dans S_α tel que

$$e^{u(\theta - 2k\alpha)} = r_1 r_2$$

donc

$$e^{u\theta} = r_1 r_2 e^{u2k\alpha}$$

donc

$$r = r_1 r_2 (e^{u\alpha})^{2k}$$

et donc r est produit de $2k + 2$ éléments de S_α.

* *Deuxième cas :* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Dans ce cas, on a $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$. Donc pour $e^{u\theta} \in SU(2)$, d'après le premier cas, on a

$$e^{u\theta} = r_1 r_2 \dots r_{2k+2}$$

avec $r_i \in S_{\pi - \alpha}$, pour $i = 1, 2, \dots, 2k + 2$, donc

$$e^{u\theta} = (-r_1)(-r_2) \dots (-r_{2k+2})$$

avec $-r_i \in S_\alpha$.

En effet, si $r_i \in S_{\pi-\alpha}$,

$$\mathrm{tr}(-r_i) = -\mathrm{tr}(r_i) = -2\cos(\pi-\alpha) = 2\cos\alpha,$$

donc $\arg(-r_i) = \alpha$. Ainsi, $e^{u\theta}$ se décompose en produit pair d'éléments de S_α.

* *Troisième cas :* $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ce cas a déjà été traité dans la proposition 5, donc la proposition 6 est démontrée.

Nous allons maintenant déduire le corollaire suivant.

Corollaire 7 _ *Les seuls sous-groupes distingués de* SU(2) *sont* $\{id\}$, $\{id, -id\}$ *et* SU(2).

En effet, soit G un sous-groupe distingué de SU(2) contenant un élément :
$v \in \mathrm{SU}(2) \setminus \{id, -id\}$.

Posons $\alpha = \arg v$. Alors G contient S_α (car G est distingué) et, comme S_α engendre SU(2) (car puisque $\begin{cases} v \neq \mathrm{id} \\ \text{et} \\ v \neq -\mathrm{id} \end{cases}$; $\alpha \in \,]0, \pi[$), $G = \mathrm{SU}(2)$, d'où la proposition 7.

4° _ Remarques de nature géométrique.

Définition _ Si $u \in S^2$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, $r_u(\theta)$ désignera la rotation d'axe orienté (O, u) et d'angle θ, c'est-à-dire si (u, v, w) est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, la matrice de $r_u(\theta)$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}$.

Ainsi, $r_u(\theta)$ et $r_{-u}(\theta)$ désignent deux rotations différentes. En fait, nous avons :

$$r_{-u}(\theta) = r_u(\theta)^{-1} = r_u(2\pi - \theta).$$

Nous allons maintenant interpréter géométriquement certaines multiplications dans SU(2).

Propriété 8 _ *Si* $u, v \in S^2$ *tels que* $< u, v > = 0$, nous avons pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$v\, e^{u\theta} = e^{-u\theta} v = r_u(\theta)v \in S^2 \qquad (\text{ou } S_{\pi/2})$$

En effet, nous avons

$$v\, e^{u\theta} = v\,(\cos\theta + u\sin\theta) = \cos\theta v + \sin\theta u \wedge v \qquad (\text{car } < u, v > = 0),$$

$$e^{-u\theta} v = (\cos\theta - u\sin\theta)v = \cos\theta v + \sin\theta u \wedge v.$$

Donc, dans la base $(u, v, u \wedge v)$ qui est orthonormée directe $e^{-u\theta}v$ et $v\, e^{u\theta}$ ont pour coordonnées $\begin{vmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$, donc la propriété 8 est bien vérifiée.

Application 9 _ *L'application* $\begin{cases} S^2 \longrightarrow S^2 \\ v \longmapsto e^{-u\theta} v e^{u\theta} \end{cases}$ *est la restriction à* S^2 *de* $r_u(2\theta)$ (pour $u, v \in S^2$ et $\theta \in [0, \pi]$).

Remarquons tout d'abord que $e^{-u\theta} v e^{u\theta} \in S^2$ car S^2 est une classe de conjugaison de SU(2).

Posons $v = \alpha u + \beta v'$ avec $v' \in S^2$ tel que $< u, v' > = 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Cette décomposition a un sens dans $\mathbb{R}^3$ mais n'en a pas dans SU(2) car $\alpha u,\ \beta v' \notin$ SU(2).

Néanmoins, nous ferons la convention habituelle qui consiste à considérer u et v comme des matrices et donc que « $v = \alpha u + \beta v'$ » est une égalité matricielle. Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
& e^{-u\theta} v e^{u\theta} = e^{-u\theta}(\alpha u + \beta v')\, e^{u\theta} \\
& \qquad = \alpha\, e^{-u\theta} u\, e^{u\theta} + \beta\, e^{-u\theta} v' e^{u\theta} \\
& \qquad = \alpha\, e^{-u\theta} e^{u\pi/2} e^{u\theta} + \beta\, v' e^{u\theta} e^{u\theta} \quad \text{(d'après 8)} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-u\theta} v e^{u\theta} = \alpha e^{u(-\theta + \pi/2 + \theta)} + \beta v' e^{2u\theta} \\
& \qquad = \alpha u + \beta v' e^{(2\theta)u} \\
& \qquad = \alpha r_u(2\theta).u + \beta\, r_u(2\theta).v' \quad \text{(d'après 8)} \\
& \qquad = r_u(2\theta)(\alpha u + \beta v') \\
& \qquad = r_u(2\theta) v,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve l'application 9.

Corollaire 10 _ *L'application* f *:* SU(2) $\longrightarrow$ SO(3) *définie par* $f(e^{u\theta}) = r_{-u}(2\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $u \in S^2$ *est un homomorphisme surjectif de groupe et, de plus,* SU(2)/{1, – 1} est *isomorphe* à SO(3).

Tout d'abord, remarquons que pour $r \in$ SU(2) l'écriture de r sous la forme $e^{u\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $u \in$ SU(2) n'est unique que pour $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$. Cependant, pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on a $2\theta = 0$ ou $2\theta = 2\pi$, donc dans ces deux cas, $r_u(2\theta) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $u \in S^2$, donc f est bien définie.

Montrons maintenant le corollaire 10.

* Nous avons

$$f\,[(e^{\,u\theta})^{-1}] = f\,(e^{-u(} \qquad) = r_{-u}(2\theta)^{-1} = f\,(e^{\,u\theta})^{-1}$$

* Soient $r_1, r_2 \in \mathrm{SU}(2)$; posons $\begin{cases} r_1\, r_2 = e^{\,u\theta} \\ \ldots \\ r_1 = e^{u_1\theta_1} \\ \& \\ r_2 = e^{u_2\theta_2} \end{cases}$

avec $u, u_1, u_2 \in \mathrm{S}^2$ et $\theta, \theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$. Pour $v \in \mathrm{S}^2$, nous avons

$$f\,(r_1\, r_2)v = r_{-u}(2\theta)v = e^{-(-u\theta)}v\, e^{-u\theta} \qquad \text{(d'après l'application 9),}$$

donc

$$f\,(r_1\, r_2)v = e^{\,u\theta}v\, e^{-u\theta} = r_1\, r_2 v\,(r_1\, r_2)^{-1} = r_1\, r_2 v\, r_2^{-1}\, r_1^{-1},$$

donc

$$f\,(r_1\, r_2)v = e^{u_1\theta_1}\,(e^{u_2\theta_2}v\, e^{-u_2\theta_2})\, e^{-u_1\theta_1} = e^{u_1\theta_1}\{f(r_2).v\}\, e^{-u_1\theta_1}$$

donc finalement,

$$f\,(r_1\, r_2)v = f(r_1)f(r_2)v.$$

Donc $\begin{cases} f\,(r_1\, r_2) \\ \text{et} \\ f\,(r_1)\,.\,f(r_2) \end{cases}$ ont même restriction à S^2, donc $f\,(r_1\, r_2) = f\,(r_1)f(r_2)$.

* f est surjective car un rotation d'axe orienté (O, u) et d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ est l'image par f de $e^{-u\,\theta/2}$.

* Calculons le noyau de cette application : soit $e^{u\theta} \in \operatorname{Ker} f$, alors quel que soit $w \in S^2$, nous avons $f(e^{u\theta})w = w$ donc $r_{-u}(2\theta)w = w$.

Ceci est vrai en particulier si $< w, u > = 0$; dans ce cas cette égalité devient :

$$\cos 2\theta w - \sin 2\theta u \wedge w = w.$$

Comme la famille $(w, \; u \wedge w)$ est libre, nous avons $\cos 2\theta = 1$ et $\sin 2\theta = 0$, donc $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, ce qui prouve que $e^{u\theta} = 1$ ou $e^{-u\theta} = -1$, donc $\operatorname{Ker} f = \{1, -1\}$.

* f étant surjective, nous avons alors que SU(2)/Ker f est isomorphe à SO(3), donc SU(2)/ {1, – 1} est isomorphe à SO(3), ce qui prouve le corollaire 10.

Remarque _ La proposition 7 permet aussi de déduire que SU(2) /{1, – 1} est simple et, par conséquent (d'après le corollaire 10), que SO(3) est simple.

III _ Sous-Groupes distingués de U(n).

Nous commencerons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 11 _ *Les rotations planes de* SU(n) *engendrent* SU(n).

* Si $n = 2$, le résultat est immédiat car tout élément de SU(2) est une rotation plane.

* Supposons que SU(n – 1) soit engendré par les rotations planes. Soit $r \in$ SU(n). Supposons dans un premier temps que :

$$r = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & (0) \\ & e^{i\theta_2} & \\ & & \\ (0) & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix},$$

alors

$$r = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & (0) \\ & e^{-i\theta_1} & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{i(\theta_1+\theta_2)} & & (0) \\ & & e^{i\theta_3} & \\ & & (0) & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\begin{pmatrix} e^{i(\theta_1+\theta_2)} & & \\ & e^{i\theta_3} & (0) \\ (0) & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} = p_1 p_2 \cdots p_k$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des rotations planes de SU($n-1$). Nous avons alors

$$r = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & (0) \\ & e^{-i\theta_1} & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & p_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & p_k \end{pmatrix}$$

donc r est bien un produit de rotations planes de SU(n). Supposons maintenant r quelconque, alors il existe $p \in$ SU(n) tel que

$$p^{-1} r p = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & (0) \\ (0) & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Donc, nous avons la décomposition $p^{-1} r p = r_1 r_2 \ldots r_k$ où $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sont des rotations planes.

Donc,

$$r = p\, r_1 r_2 \ldots r_k p^{-1}.$$

Soit

$$r = (p\, r_1\, p^{-1})(p\, r_2\, p^{-1}) \dots (p\, r_k\, p^{-1}).$$

Comme $r_1, r_2, \dots, r_k$ sont des rotations planes, $p\, r_1\, p^{-1}, \dots, p\, r_k\, p^{-1}$ le sont aussi et donc r est un produit de rotations planes.

Nous allons maintenant utiliser les résultats de la deuxième partie et du lemme 11 pour démontrer :

Proposition 12 _ *Si* G *est un sous-groupe distingué de* U(n) *contenant une rotation plane d'argument dans*]0, π[, *alors* G *est l'image réciproque par l'application « déterminant » d'un sous-groupe de* $S^1 = \{z = \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Si G contient une rotation plane d'argument $\alpha \in\,]0, \pi[$, alors G contient toutes les rotations planes d'arguments α, car toutes ces rotations sont conjuguées de :

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & & & (0) \\ & e^{-i\alpha} & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix},$$

donc elles sont conjuguées entre elles. G contient alors toutes les rotations planes. En effet, toutes les rotations planes sont conjuguées d'une rotation du type

$\begin{pmatrix} r & (0) \\ (0) & id \end{pmatrix}$ avec $r \in SU(2)$. Et, comme d'après la proposition 6,

$$r = r_1 r_2 \dots r_{2k}$$

avec

$$\arg r_1 = \arg r_2 = \dots = \arg r_{2k} = \alpha,$$

on a

$$\begin{pmatrix} r & (0) \\ (0) & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & (0) \\ (0) & id \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 & (0) \\ (0) & id \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} r_{2k} & (0) \\ (0) & id \end{pmatrix}.$$

Et comme nous avons vu que G contenait les rotations planes d'argument α, G contient aussi $\begin{pmatrix} r & (0) \\ (0) & id \end{pmatrix}$ et donc toutes les rotations planes.

D'après le lemme 11, les rotations planes engendrent $\mathrm{SU}(n)$, donc $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{G}$. Posons $\mathrm{S} = \det \mathrm{G} = \{\det u,\ u \in \mathrm{G}\}$ et montrons que $\mathrm{G} = \det^{-1} \mathrm{S}$.

Il est clair que $\mathrm{G} \subset \det^{-1} \mathrm{S}$; montrons la réciproque. Soit $u \in \det^{-1} \mathrm{S}$, alors il existe $v \in \mathrm{G}$ tel que $\det u = \det v$. Nous avons alors

$$\det (uv^{-1}) = \frac{\det u}{\det v} = 1, \text{ donc } uv^{-1} \in \mathrm{SU}(n)$$

et donc $uv^{-1} \in \mathrm{G}$. Et, comme $v \in \mathrm{G}$, nous avons aussi $uv^{-1}v = u \in \mathrm{G}$, donc $\det^{-1} \mathrm{S} \subset \mathrm{G}$, ce qui implique que $\mathrm{G} = \det^{-1} \mathrm{S}$.

Nous allons maintenant en déduire qu'il n'existe que deux types de sous-groupes distingués dans $\mathrm{U}(n)$.

Proposition 13 _ *Soit G un sous-groupe distingué de* $\mathrm{U}(n)$, *alors :*

(α) *ou bien* G *est un sous-groupe du groupe des homothéties ;*

(β) *ou bien* G *est l'image réciproque par l'application « déterminant » d'un sous-groupe de* S^1.

* *Premier cas.* _ G ne contient que des homothéties, alors G est un sous-groupe du groupe des homothéties.

* *Deuxième cas.* _ Il existe $u \in \mathrm{G}$ qui n'est pas une homothétie, G contient alors un conjugué de u de type

$$\begin{pmatrix} z_1 & & (0) \\ & z_2 & \\ (0) & & z_n \end{pmatrix}$$

avec $z_1 \neq z_2$. Nous considérons alors deux cas :

1°) _ $z_1 z_2^{-1} \neq -1$. Puisque

$$\begin{pmatrix} z_1 & & & (0) \\ & z_2 & & \\ & & z_3 & \\ (0) & & & z_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} z_2 & & & (0) \\ & z_1 & & \\ & & z_3 & \\ (0) & & & z_n \end{pmatrix}$$

sont conjuguées, nous avons

$$\begin{pmatrix} z_2 & & & (0) \\ & z_1 & & \\ & & z_3 & \\ (0) & & & z_n \end{pmatrix} \in G$$

donc

$$\begin{pmatrix} z_2^{-1} & & & (0) \\ & z_1^{-1} & & \\ & & z_3^{-1} & \\ (0) & & & z_n^{-1} \end{pmatrix} \in G$$

et donc

$$\begin{pmatrix} z_1 & & (0) \\ & z_2 & \\ (0) & & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_2^{-1} & & & (0) \\ & z_1^{-1} & & \\ & & z_3^{-1} & \\ (0) & & & z_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2^{-1} & & & (0) \\ & z_2 z_1^{-1} & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{G}.$$

Or, cette matrice est une rotation plane d'argument dans $]0, \pi[$ car, par hypothèse,
$\begin{cases} z_1 z_2^{-1} \neq -1 \\ et \\ z_1 z_2^{-1} \neq 1 \ \text{(car } z_1 \neq z_2) \end{cases}$ donc d'après la proposition 12, G est bien l'image réciproque d'un sous-groupe de S^1.

2°) _ $z_1 z_2^{-1} = -1$, c'est-à-dire $z_2 = z_1$. Nous avons

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_1 \end{pmatrix} = i\, z_1 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

or $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in$ SU(2), donc d'après la proposition 5, il existe $r_1, r_2 \in$ SU(2) tel que :

$$\arg r_1 = \arg r_2 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = r_1 r_2.$$

Donc, r_1 et $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ sont conjuguées dans SU(2); il existe donc $p \in$ SU(2) tel que

$$p^{-1}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} p = r_1.$$

En multipliant cette égalité par $i\, z_1$, nous obtenons

$$p^{-1}\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_1 \end{pmatrix} p = i\, z_1 r_1,$$

ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & & & (0) \\ & -z_1 & & \\ & & z_3 & \\ (0) & & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\, z_1(r_1) & & (0) \\ & z_3 & \\ (0) & & z_n \end{pmatrix},$$

donc

$$(\Delta) \qquad \begin{pmatrix} i\, z_1(r_1) & & (0) \\ & z_3 & \\ (0) & & z_n \end{pmatrix} \in G.$$

D'autre part, $\arg r_2^{-1} = \dfrac{\pi}{2}$ car les valeurs propres de r_2^{-1} sont aussi i et $-i$, donc par un même raisonnement, on a

$$\begin{pmatrix} iz_1(r_2^{-1}) & & (0) \\ & z_3 & \\ (0) & & z_n \end{pmatrix} \in G,$$

donc

$$(\Delta\Delta) \qquad \begin{pmatrix} (iz_1)^{-1} r_2 & & (0) \\ & z_3^{-1} & \\ (0) & & z_n^{-1} \end{pmatrix} \in G.$$

(Δ) et $(\Delta\Delta)$ impliquent alors que

$$\begin{pmatrix} i\, z_1(r_1) & & (0) \\ & z_3 & \\ (0) & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (iz_1)^{-1} r_2 & & (0) \\ & z_3^{-1} & \\ (0) & & z_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

soit

$$\begin{pmatrix} -i & & & (0) \\ & i & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{G}.$$

G contient donc une rotation plane d'argument $\frac{\pi}{2}$. Donc, d'après la proposition 12, G est encore l'image réciproque par l'application « det » d'un sous-groupe de S^1. Ainsi, la proposition 13 est démontrée.

Définition _ Nous dirons que $r \in \mathrm{U}(n)$ est une dilatation de rapport $z_0 \in \mathrm{S}^1$, s'il existe $p \in \mathrm{U}(n)$ tel que :

$$p^{-1} r\, p = \begin{pmatrix} z_0 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant énoncer une proposition concernant l'engendrement des sous-groupes distingués de $\mathrm{U}(n)$ du deuxième type.

Proposition 14 _ *Soit* S *un sous-groupe de* S^1, *alors* $\det^{-1}\mathrm{S}$ *est engendré par les dilations de rapport dans* S. (*On suppose* $\mathrm{S} \neq \{1\}$.)

Le sous-groupe engendré par les dilations de rapport dans S est distingué. En effet, soit $u = d_1 \ldots d_k$ où les d_i sont des dilations de rapport dans S ; alors, pour $p \in \mathrm{U}(n)$, on a

$$p^{-1} u\, p = (p^{-1} d_1\, p)(p^{-1} d_2\, p) \ldots (p^{-1} d_k\, p)$$

et, comme $d_1, d_2, \ldots, d_k$ sont des dilations de rapport dans S, il en est de même de $p^{-1} d_1\, p,\ p^{-1} d_2\, p, \ldots, p^{-1} d_k\, p$; on a $p^{-1} u\, p$ est dans le sous-groupe engendré par ces dilations. Ce sous-groupe est donc bien distingué. Par ailleurs, il contient des dilations de rapport différent de 1, donc, d'après la proposition 13, c'est l'image réciproque par l'application « det » d'un sous-groupe de S^1. Comme l'image par « det » de ce sous-groupe est S, ce sous-groupe est $\det^{-1} S$.

Exemple _ Si $S = \{1, -1\}$, les dilations de rapport dans S sont les symétries hyperplanes de $U(n)$, et on obtient le résultat suivant :
« Les symétries hyperplanes de $U(n)$ engendrent les endomorphisme unitaires de déterminant 1 ou -1 ».

Ce résultat généralise le fait que les symétries hyperplanes réelles engendrent $O(n)$ (les isométries de $\mathbb{R}^n$). Mais c'est précisément ce résultat qui fait l'objet d'un problème ouvert dans le cadre des espaces hermitiens quelconques.

Application 15 _ $PU(n) = U(n)/\mathcal{H}_n$ *est simple* ($\mathcal{H}_n$ *sont les homothéties de* $U(n)$).

En effet, soit G un sous-groupe distingué de $PU(n)$ tel que $G \neq \{1\}$. Soit s la surjection canonique de $U(n)$ sur $PU(n)$. Alors, $s^{-1}(G)$ est un sous-groupe distingué de $U(n)$ qui ne contient pas que des homothéties car

$$\begin{cases} s\{s^{-1}(G)\} = G \neq \{1\} \\ \& \\ s(\mathcal{H}_n) = 1 \end{cases}.$$

Donc, d'après la proposition 13, il existe un sous-groupe S de S^1 tel que

$$s^{-1}(G) = \det^{-1} S.$$

Montrons que $S^1 \subset S$. Soit $z \in S^1$ et notons $\sqrt[n]{z}\, id$ une racine $n^{\text{ième}}$ de z ; alors $\sqrt[n]{z}\, id$ est une homothétie, donc

$$\sqrt[n]{z}\, id \in s^{-1}\{1\} \subset s^{-1}(\mathrm{G}).$$

Comme det $\{\sqrt[n]{z}\ id\ \} = z$, $s^{-1}(\mathrm{G})$ contient un élément de déterminant z, or $s^{-1}(\mathrm{G}) = \det^{-1}\mathrm{S}$, donc $z \in \mathrm{S}$, d'où $\mathrm{S}^1 \subset \mathrm{S}$, donc $\mathrm{S} = \mathrm{S}^1$ et donc

$$s^{-1}(\mathrm{G}) = \det^{-1}\mathrm{S}^1 = \mathrm{U}(n).$$

Et comme s est surjectif, on a $\mathrm{G} = \mathrm{PU}(n)$, donc $\mathrm{PU}(n)$ est simple.

Le résultat est en quelque sorte une généralisation du fait que pour $n \geq 5$, $\mathrm{PSO}(n)$ est simple.

Le propre des classiques, les inépuisables classiques, est d'être relus constamment : ils ne sont en rien anciens, mais au contraire, à venir…

Le but de l'instruction est la fin de l'instruction, c'est-à-dire l'invention. L'invention est le seul acte intellectuel vrai, la seule action d'intelligence. Le reste ? Copie, tricherie, reproduction, paresse, convention, bataille, sommeil. Seule éveille la découverte. L'invention seule prouve qu'on pense vraiment la chose qu'on pense, quelle que soit la chose. Je pense donc j'invente, j'invente donc je pense : seule preuve qu'un enseignant-chercheur travaille ou qu'un auteur écrit.

Tout chercheur consciencieux, s'interroge sur cette étrange passion — lire — dont il soupçonne qu'elle cache quelque chose. Il semble que j'aie trouvé dans la bibliothèque qui m'accueille, un objet d'amour. Un objet d'amour qui en remplace un autre.

Tout lecteur est un Prince. Me voici descendant dans la crypte enténébrée et poudreuse de la bibliothèque. J'avance la main vers un ouvrage oublié. Je m'en saisis, je l'ouvre et parcours quelques lignes au hasard. Le livre endormi se réveille. Je viens de toucher un corps : celui de la Belle au bois dormant.

Vous l'avez compris, j'ai pris beaucoup de plaisir à vous présenter, cette façon de cheminer voisine, ici, de la flânerie, où l'on va à l'aventure. Plus qu'une méthode de lecture, à dire vrai, c'est d'une certaine forme d'attention, qui est, au dire de Kafka, l'un des autres noms de l'amour, que cet article relève : attention fine aux détails, notamment, aux bonnes rencontres que font les concepts dans une théorie, aux surprises des énoncés et aux caprices des démonstrations. Rien ne me semble insignifiant et surtout pas ce qui, dans une page, risque de passer inaperçu ou reste tenu à l'écart, bien à l'abri d'une parenthèse, par exemple.

Cet article, pour tout avouer, n'obéit qu'à un seul principe, le principe de plaisir, qui n'a pas toujours bonne presse. Il n'existe guère de vrais lecteurs, toutefois, sans cette révélation qui, un jour, leur a été offerte, que la lecture se présente d'abord comme un bonheur et un bonheur intense. Lire, feuilleter, consulter, retenir, pasticher, cocher, citer, annoter, commenter, écrire : voilà ce qu'aura été l'essentiel de mes activités.

La Mathématique pour moi, est d'abord une conversation, un échange, une transmutation, un art des renversements, le contraire, donc, de la publicité ou de la propagande qui veut la réduire au calcul ou à des règles d'arithmétique. Elle doit laisser place à l'improvisation, à l'imagination, à l'intuition, à la créativité, à l'invention des cadences.

J'ai aimé passionnément la production de mes articles, tous inspirés des belles théories qui fondent notre humanité. Tout ce que j'ai pu écrire leur doit l'essentiel. Leur liberté et le génie de leurs théorèmes et de leur définitions, leur énergie révolutionnaire, m'ont accompagné et continuent à m'inspirer sans cesse.

Les théories dont je m'inspire pour mes articles incarnent les passions pour lesquelles je donnerais volontiers mon salaire d'Enseignant-Chercheur. Chacun de mes articles est une aventure physique et mathématique qui a pour but la poésie pratique, c'est-à-dire la plus grande liberté possible.

On peut me reprocher d'ici-delà, ma fantaisie, celle de mélanger, récits et démonstrations mathématiques. J'étais tenté de suivre le conseil de ceux qui regrettent me voir m'affranchir des codes de publications et de prendre les chemins de traverse. Puis j'ai dit : non, ça me lèserait. J'ai voulu me donner un petit plaisir subjectif complémentaire. Est-ce grave ? Le réel n'a d'intérêt que pour le supplément d'âme qu'il offre et qu'on trouve, non pas au cœur de la matière, mais à la périphérie de l'objet, là où il est en contact avec le regard de l'artiste.

Les équations ne parlant pas d'elles-mêmes, il faut que quelqu'un le fasse à leur place. Les récits au futur antérieur de mes publications à caractère pédagogique, parlent – hormis des Mathématiques – de mon rapport d'étranger à la langue française qui me rend sensible, au-delà du sens des mots, à leurs sonorités et leurs saveurs.

Ce qui m'amène à dire que la théorie du groupe unitaire en Algèbre emporte le jugement, sa présence s'impose comme une évidence et emporte l'adhésion. Elle est déjà du regard de celui qui la découvre, elle le requiert, elle dépasse la conviction. Vous êtes dans ce rapport immédiat ou alors c'est manqué, ça ne sera pas pour vous, pas cette fois-ci. Vous êtes compromis dans son geste, vous êtes de son collage. Voilà, elle comprend celui qui l'aborde, il est de sa mise en scène, il est dedans, il est de son commentaire. Sur la caractérisation des classes de conjugaison du groupe des rotations, dans les sous-groupes distingués elle se constitue de dire tout. Et parce qu'elle s'organise dans le jeu, dans sa musique, dans l'apparente désinvolture elle dit l'essentiel de ce qu'il faut savoir en Algèbre. Elle poursuit, commente, elle fait œuvre du commentaire. De l'histoire des idées et des formes elle impose la forte vérité : voilà ce que nous aimons. Voilà d'où nous partons, voilà ce qui nous agit, voilà ce qui fait culture et beauté. C'est là, c'est dans la théorie du groupe unitaire.

Imaginez un peu toute cette histoire classique et autre (votre éducation), ces accumulations de propositions, ces matrices, ces applications ! Et ce que nous ressentons devant les sous-groupes distingués, les sous-groupes du groupe des homothéties, les dilations : c'est l'œuvre de la théorie du groupe unitaire. Elle est de ce que nous avons ressenti et de ce que nous ressentons. Et lorsque nous la voyons c'est un peu comme si elle avait déjà été faite, quoique rien de tel n'a jamais été fait, n'a jamais de cette façon touché en nous, nommé en nous le sentiment et le ressentiment et le goût. Elle engage notre plaisir culturel : la rotation plane, le produit hermitien, le déterminant d'un sous-groupe, les symétries hyperplanes,…

Nous avons déjà vécu tout cela et c'est de ce vécu que la théorie du groupe unitaire s'engage à dire la vérité. Si vous voulez vraiment savoir ce qui vous fait heureux, ce qui vous fait aimer et admirer c'est là, c'est aussi là, comme expérience et comme savoir. Assurément la théorie du groupe unitaire a un corps qui lit, qui voit et qui vit, et ce que ses résultats exposent c'est ce mode d'être et de voir qui passe par le corps. La pensée ça passe par là et ce corps nous montre les chemins de la pensée et que les chemins de la pensée sont aimables. Sa composition ainsi invite à voir et à penser d'une nouvelle façon et elle fait de cette façon nouvelle synthèse entre voir et penser. C'est comme ça qu'elle écrit, qu'elle est dans la voix de l'écrit. Du corps à l'écrit et de l'écrit par le corps il y va de cette jouissance et dans cette partie du corps où s'éveille la beauté.

Loin du langage formel que seuls les initiés comprennent, nous avons tous une langue singulière, dans laquelle réside la vérité et qu'il faut favoriser. C'est ce que j'essaie de faire à mon modeste niveau.

D'où mon nomadisme, d'une théorie à l'autre, d'une Mathématique à l'autre, d'un auteur à l'autre, d'une créativité à l'autre. Dans l'étrangeté d'une théorie, j'essaie de remettre en question mes propres frontières intérieures et me trouve dans un état de création permanent. C'est pourquoi l'étrangeté m'apparaît comme une grâce.

« Je me voyage » : tel est le principe de ce nomadisme intérieur qui me rend libre.

Je crois très profondément que ce qu'on appelle la Mathématique, la Mathématique, est faîte pour être *en-ten-due*, dans la solitude du chercheur ce qui compte, c'est l'écoute, c'est la voix. Mathématiser et écrire sont, du moins pour moi, une joie constante.

Ce qui compte avant tout c'est la parole qui s'écrit et qu'il faut entendre. Le problème doit être posé non pas quel est l'avenir de la Mathématique à l'heure d'Internet ou des nouvelles technologies mais, qui sera capable d'entendre ou de ne pas entendre les informations qu'il a sous les yeux.

Un collègue d'un certain âge, en lisant mes publications, m'a dit : « Enlève ces couleurs, cela faciliterait l'impression de tes articles ! » J'ai cru que c'était une blague, mais il était très sérieux…

La couleur des équations. C'est un truc que tout le monde devrait savoir. Voir que les équations pouvaient être assimilées à des couleurs, c'est un événement dans ce que l'on pourrait appeler l'expérience mathématique. Pour certains collègues, toutes les équations sont grises. Pour moi, au contraire, les choses sont très tranchées, très en couleur, et très sensuellement ressenties. Et il m'a semblé qu'il s'agissait de la grâce que peut nous donner la Mathématique. Par elle, nous pouvons réunifier deux facultés que notre modernité sépare : l'intelligence et le sentiment. La Mathématique a pour objet de comprendre le monde et sa valeur tient à sa force de vérité mais elle ne réduit pas les individus à des exemplaires ou à des spécimens. Elle s'intéresse aux cas particuliers et nous permet de faire notre une expérience étrangère.

Si la Mathématique est la nourriture de l'amour… *If mathematic be the food of love…*alors, il faut fréquenter les bibliothèques, afin de procéder à la lecture d'un certain nombre de textes qui nous apparaissent eux-mêmes comme des lectures de l'existence ; il convient, assurément, de se faire savant. Étudiez, travaillez, il en restera toujours quelque chose. Et après ? Pour qu'il existe un après, je veux dire quelque avenir qui dépasse la copie, sortez de la bibliothèque pour courir au grand air ; si vous demeurez dedans, vous n'écrirez jamais que des livres faits de livres. Ce savoir, excellent, concourt à l'instruction, mais celle-ci a pour but autre chose qu'elle-même. Dehors, vous courrez une autre chance. Nous entrons malheureusement, dans une société post-littéraire et bien lire, c'est marquer ce que nous risquions de perdre si nous abandonnions la vision littéraire du monde.

La fréquentation très intense que j'ai des bibliothèques m'amène à distinguer deux sortes d'ouvrages : ceux qu'on a lus et ceux qu'on lit tout le temps. Les œuvres dont je m'inspire, pour mes articles sont celles auxquelles ma propre actualité me ramène constamment.

L'espérance serait-elle une erreur ?

Qu'est-il permis à un chercheur d'espérer ? Créer par l'imagination, les concepts pour célébrer le don de la joie ! Il suffit d'être à l'écoute de la voix de la nature elle-même. Et qui peut-on voir s'avancer sinon Orphée, puisque la nature parle algèbre, la langue universelle est trouvée, l'âme du monde circule, l'harmonie est rétablie à travers un merveilleux pouvoir de l'intellect qui fait tourner à la manière d'un orgue les instruments, les corps, les voix, les graines de la matière et les pollens de l'esprit. Mettrait-on Orphée dans un désert, qu'il n'en continuerait pas moins de mathématiser. Isolez un atome, et vous y trouverez un soleil et des planètes gravitant alentour. Le chercheur solitaire — soleil, ''isolé'' — continue donc de mathématiser… On peut certes toujours évoquer le dernier Théorème de Fermat, interpréter la Conjecture de Poincaré, mais de là à entendre réellement de quoi il s'agit, il ne faudrait rien de moins qu'une transmutation entière qui n'est pas prévue au programme de la transmission. L'envers du décor institué par le didactisme tardif n'est que réflexions assez brumeuses sur le transfert des connaissances. Seuls peut-être les merveilleux visionnaires comme Wiles ou Perelman, en Mathématique toujours, peuvent nous faire signe, de loin en loin, dans leur liberté rebelle; il suffit d'entendre Wiles parler des courbes modulaires, des courbes elliptiques, et le pont qui les relie à Fermat. La Tempête se clôt sur son accent réconcilié, pacifié, sublimement détaché.

On pourrait dire de façon très étrange que ces chercheurs de vérité sont mus par une sorte de mélancolie.

Oui, un état de mélancolie. En fait, c'était un désir éperdu de vivre. Jamais l'univers mathématique n'avait paru si beau, à Perelman, jamais il n'avait eu autant envie de vivre ses Mathématiques, et il allait à plusieurs reprises refuser des prix prestigieux, dont la médaille Fiels. Par conséquent, le mot « mélancolie », faut-il le dire, je ne le vois pas tellement comme une tristesse. C'est quelque chose de plus vital. Il y a un furieux « je veux vivre ». Vous voyez ? Ce n'est pas romantique. J'emploie probablement ce mot complètement à l'envers.

Quel est donc ce défi qui hante ces esprits curieux, lorsqu'ils décident de s'attaquer à un morceau de bravoure ? Savoir un tant soit peu se saisir de la clef de l'amour ! Ils la ramassent à l'endroit précis où tout le monde l'avait laissée tomber. Ils retrouvent ce que Rimbaud appelle aussi « *les voix instructives exilées* » ; ils expérimentent ce qu'il dit quand il affirme que « *la musique savante manque à notre désir* » ; qu'il en faudrait une « *plus intense* » ; qu'il y aurait lieu d'inventer, « *pour le public éduqué* », un « *chant clair* ».

Car, *en se promenant dans un rayon de librairie, on peut prendre un livre en main, le feuilleter, son chant alors, vous arrête et fait jaillir l'étincelle.* Ils nous montrent, après Rimbaud, que nous pouvons, nous aussi, trouver soudain « *une maison musicale pour notre claire sympathie* » ; nous pourrions même constater que *des théories bâtis en concepts, sort la musique inconnue*, enfin, il pourrait se faire que nous entrions dans *un rêve intense et rapide où l'on nous montrerait que derrière les équations se cachent des audaces de l'imagination, des sentiments impérieux, qui transcendent la logique et donnent à la science une touche artistique.* On chante, on mathématise « *des fleurs et des bijoux qui nous sont gracieusement proposés* », « *des bouquets de satin blanc et des fines verges de rubis qui entourent la rose d'eau* » : il s'agit bien d'une extase harmonique, rendue sensible au cœur, dont personne ne veut plus au ''*temps des détresses*''. Voici sur ma droite « *la* *foule des jeunes et fortes roses* », et croyez-moi, pour nous guérir de la bouillie de notre cerveau, rien de tel que ce traitement de douceur « *Ô douceurs, ô monde, ô musique !* ». Nous attendons même à bord d'un vaisseau, « *après le déluge* », qu'un couple de chercheurs de graal, s'isole sur l'arche, et qu'avec lui sonnent « *les voix reconstituées, l'éveil des énergies chorales* ».

C'est ainsi qu'il se construit un partenariat fructueux entre l'imagination et la rationalité. Autrement dit, qu'un jeu s'organise entre d'une part les questions et les solutions produites par l'imagination et d'autre part les contraintes de cohérence du formalisme et de l'observation.

Je pense que la science naît de la tension entre ces deux pôles, mais ne se confond pas avec l'un ou l'autre. Autrement dit, elle n'est ni une pure contrainte, ni le droit systématique au rêve.

Pratiquer la science, c'est penser que description et explication sont deux procédures qui convergent. Adhérer à sa lucidité, c'est penser que la vérité même si elle est inaccessible, est au bout de l'asymptote et que tout progrès de la connaissance en rapproche.

Je reste persuadé que le réel est interprété au rythme des oscillations entre l'idée et la chose. Ce qui veut dire qu'entre le concret et l'abstrait, un va-et-vient s'organise.

Théo Héikay/pdf