Être ou ne pas *Être Contractante*, C'est là la question !!

I – La structure nerveuse et osseuse de l'article

Prenez un mouchoir, supposez que vous l'étaliez pour le repasser, vous pouvez définir sur lui des distances et des proximités fixes. Autour d'une petite roue ronde que vous dessinez au voisinage d'un lieu, vous pouvez marquez des points proches et mesurer, au contraire, des distances lointaines. Prenez ensuite le même mouchoir et chiffonnez-le, en le mettant dans votre poche : deux points très éloignés se trouvent tout à coup voisins, superposés même ; et si, de plus, vous le déchirez en de certains endroits, deux points très rapprochés peuvent s'éloigner beaucoup.

« *Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique*. » --- Galilée. Ce sont ses propres paroles : « La nature parle algèbre et topologie. » On appelle topologie cette science des voisinages et des déchirures, et géométrie métrique la science des distances bien définies et stables.

La structure générale de cet article est simple. Le sujet est défini par une idée directrice fantastique, six lemmes de base, une invention intellectuelle calme et pénétrante, une propriété profonde, deux définitions cruciales, une définition auxiliaire, un théorème majeur et son corollaire.

- **L'idée directrice fantastique :** *il est inouï que d'un coup de pioche à l'intuition, une application puisse émerger d'un iceberg d'une contractante prodigieuse dans sa relation à un ensemble métrique compact.*
- **Les lemmes de base :** *donnent vie aux distances.*

- **L'invention calme et pénétrante :** *la fonction mathématique*
- **La propriété profonde :** *la continuité.*
- **Les définitions cruciales :** *une application dite contractante et deux distances topologiquement équivalentes.*
- **La définition auxiliaire** : *une limite.*

*** Le théorème majeur et son corollaire :** enrichissent la notion d'être contractante. Ils corrigent notre conception antérieure. Ils modifient les significations et les conditions de réception de la définition qui les ont précédés. Ils réorganisent, c'est-à-dire rendent organique dans une relation structurelle et rhétorique nouvelle, le cas singulier d'une application lipschitzienne. Ils constituent des ponts assurés entre le concept et sa traduction. L'œil imaginaire, poussé jusqu'à l'extrême bord de l'espace et du temps ne trouve rien qui l'empêche de pousser plus loin. Chaque limite imaginable étant une séduisante invitation à examiner l'autre côté de l'au-delà. Que voulez-vous ? Les pommes tombent pour tout le monde, mais un peu différemment sous les yeux de **Newton**.

Ce sont là les grands murs porteurs et les arcs-boutants du sujet.

Les affinités électives _ le titre de Goethe _ entre les concepts et ceux qui veulent les faire parler.

Il ne me reste plus qu'à souhaiter au lecteur que la transe puisse l'enthousiasmer, au sens étymologique, c'est-à-dire qu'elle puisse le transporter en des lieux desquels on revient métamorphosé. Certes, avec la même planche, aucun surfeur ne prend la vague de la même façon, mais chacun accepte l'éventualité de se casser la figure sur la muraille déferlante d'eau ou de se noyer sous son rouleau.

En ce qui me concerne, le mouvement m'a conduit assez loin pour que je me sois trouvé métamorphosé en explorateur. Ami lecteur, écrirai-je, et me comprendras-tu si je te dis que mon retour est celui d'un « nouvel homme », pour reprendre l'expression de **Paul Valéry**. Aux extrémités les plus éloignés du trajet, le quai d'embarquement est loin, la traversée a été rude, les flots ont été déchaînés et les paquets de mer furieux, mais une rive vierge a été abordée, conquise. De nouvelles terres ont été découvertes.

Je n'écris que pour ceux qui aiment le courage intellectuel, _ pour comprendre, il faut d'abord comprendre qu'il y a quelque chose à comprendre, _ dans l'espoir de les toucher, de les atteindre et de les concerner. Contre la quantité et le nombre, je vise la qualité et l'élection : rien n'est plus souhaitable que cette amitié par le biais d'un article, cette proximité par les textes, cette fraternité établie sur la foi des concepts. Je suis arrivé tout essoufflé et je plongeais aussitôt avec de grands rires, en récitant du **Mallarmé** : « Les Mathématiques sont une forme déconcertante, mais évidente de poésie chiffrée. » Eh oui, lorsque le moment du succès vient, c'est un rire immense de joie.

La joie que j'ai pour les Mathématiques est aussi réelle que la politesse que j'ai lorsque je salue mes semblables. L'illusion consiste à croire que je fais les Mathématiques parce qu'elles sont belles. Ce que m'apprend **Spinoza**, c'est que ce n'est pas parce qu'elles sont belles que je les pratique, mais parce que je m'y exerce quotidiennement que je les trouve belles. Du coup, la liberté prend un sens aérien, prend un sens assez gai, assez joyeux. Au fond, le maître mot serait la joie. Moins le plaisir que la joie. La joie de penser, la joie de vivre, la joie d'avoir un corps, la joie de rencontrer les autres. La joie. Au fond, la Mathématique, c'est ça : la découverte de la splendeur de la joie, par des démonstrations foudroyantes, élégantes.

II _ Les relations spatiales et chromatiques sur sa toile, les dimensions de la nef

Définition 1_ *Soient E et F métriques. Une application f de E dans F est dite lipschitzienne si et seulement si il existe une constante positive k telle que :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

On dit encore *k- lipschitzienne.*

Définition 2_ *Une application* $f : E \longrightarrow F$*, métriques, est dite contractante si et seulement si elle est k- lipschitzienne avec* $0 \leq k < 1$.

Mon esprit s'achoppe à ce classique plein de nostalgie (posé dans les concours) :

« soit (E, d) un espace métrique compact non vide, $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que :

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{cases} \forall\ (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x \neq y \\ d\ (f\ (x), f\ (y)) < d\ (x, y) \end{cases}.$$

Alors f admet un et un seul point fixe, que l'on peut obtenir par la méthode des approximations successives ».

Le *ici* et le *maintenant* de la vie ordinaire sont coordonnés au moyen d'une fonction mathématique, l'une des nobles mais impénétrables créations de l'imagination, le fil de soie qui relie les uns aux autres les concepts disparates d'un monde vagabond. Et si ces remarques sont formulées avec un haussement d'épaules intuitif, elles sont soutenues par un raisonnement ancien. (*rires*…) _ The *here* and *now* of ordinary life, these are coordinated by means of a mathematical function, one of the noble but inscrutable creations of the imagination, the silken thread that binds together the vagrant world's far-flung concepts. And although these remarks are delivered by a shrug of intuition, the shrug is backed up by an ancient argument. (*rires…*)

Mais le besoin de reconnaissance m'enseigne à faire de tout exercice qui se présente à moi, une justification. Eh oui, on tire les bonnes méthodes du problème même qu'on se donne à résoudre.

Comme f est 1_ *Lipschitzienne*, elle est uniformément continue, donc continue. La distance étant continue de : $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, l'application $g : x \longmapsto d(x, f(x))$ est continue de E compact dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, (on suppose $E \neq \varnothing$). Soit m sa borne inférieure atteinte en a.

Si $m = g(a) = d(a, f(a)) \neq 0$, comme $a \neq f(a)$ alors $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$ soit $g(f(a)) < m$. Ce qui est absurde.

Donc $a = f(a)$ et f admet un point fixe.

Il est unique, car si pour $a \neq b$ on avait $f(a) = f(b)$, l'hypothèse conduirait à : $d(f(a), f(b) < d(a, b)$.

Soit $d(a, b) < d(a, b)$ ce qui est difficile à réaliser : on a un seul point fixe. C.Q.F.D.

III _ Tendons l'oreille, et écoutons les tonalités et hauteurs de son qui constituent la grammaire de la musique.

La peur de trébucher cramponne mon esprit à la rampe de la logique. Une application vérifiant **(1)** est-elle contractante ? La réponse, _ n'en déplaise à ceux qui préfèrent Parménide flanqué de sa sphère immobile à Héraclite et son fleuve mobile, _ est évidemment : *Non, niet, no, nein !*

Il ne suffit donc pas d'avoir, $\forall(x,\ y) \in E^2,\ d(f(x),\ f(y)) < d(x,\ y)$ _ ce qui serait une définition plus intuitive du mot « contractante » _ pour conclure. Il suffit pour s'en convaincre de considérer par exemple :

$E = [0\ ,\ +\infty[$, complet car fermé de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow E$ définie par :

$$\begin{cases} [0\ ,\ +\infty[\longrightarrow [0\ ,\ +\infty[\\ \textit{tel que à} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

$$d(f(x),\ f(y)) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} = \left| \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \right|$$

$$= \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} |x - y|.$$

On a $\begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{x^2+1} \\ 0 \leq y < \sqrt{y^2+1} \end{cases}$, donc $\left| \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \right| < 1$

On a bien $d(f(x), f(y)) < |x - y| = d(x, y)$, mais f n'a pas de point fixe sur E car si $a \geq 0$ vérifiait $a = \sqrt{a^2+1}$ on aurait $a^2 + 1 = a^2$ soit $0 = 1$: bizarre, mais vous avez dit bizarre ?! Pour comprendre, il faut renoncer au confort des évidences faciles, qui sont conceptuellement plutôt stériles.

Autre exemple. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 + x - \dfrac{x}{1 + |x|} \end{cases}$. On vérifie aisément qu'elle est 1-Lipschitzienne, mais non contractante.

_ Mais c'est possible de faire ça, Théo ? On pensait que les mathématiques étaient une manière du genre « c'est comme ça et pas autrement ».

_ Vous aviez tort. Vivifiant, dites-vous ? Et délicieusement iconoclastes, cette façon de parler ainsi aux vents de l'histoire ? Oui, bien sûr. Comme une douche froide et pure. Niez l'existence d'être contractante et il n'y a pas de problème. Mais pas cet article non plus.

Si f était contractante, $\mathbb{R}$ étant complet, elle aurait un point fixe.

Or $x = 1 + x - \dfrac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow x = 1 + |x|$.

Une telle égalité est impossible si $x < 0$, et s'écrit $x = 1 + x$ si $x \geq 0$: il n'y a pas de point fixe donc f n'est pas contractante.

Pour justifier que f est 1- Lipschitzienne, il faut distinguer les cas x et y de même signe ou pas.

Si x et y sont ≥ 0, comme sur $[0, +\infty[$, $f(x) = 1 + x - \dfrac{x}{1+x}$ on a

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} \in [0, 1[$, donc par accroissement finis :

f est 1- Lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.

De même sur $]-\infty, 0]$, $f(x) = 1 + x - \dfrac{x}{1+x}$ d'où $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et on a encore

$f'(x) \in [0, 1[$ puisque $x \leq 0$.

Il reste le cas $x.y < 0$: par exemple $x > 0$, $y < 0$, alors

$$f(x) - f(y) = x\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) - y\left(1 - \frac{1}{1-y}\right) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1-y}$$

$$= \frac{x^2 - x^2y + y^2 + xy^2}{(1+x)(1-y)} = \frac{xy(y-x) + x^2 + y^2}{(1+x)(1-y)}.$$

Donc $\quad |f(x) - f(y)| < \dfrac{xy(y-x)}{(1+x)(1-y)} + \dfrac{x^2y^2 - 2xy}{(1+x)(1-y)}$, car $\quad -2xy > 0$

ainsi que $(1+x)(1-y)$ vu les signes de x et y, et $xy(y-x) \geq 0$.

C'est encore

$$\left|f(x)-f(y)\right| < \frac{(x-y)(-xy)+(x-y)^2}{(1+x)(1-y)}$$

$$< (x-y)\left(\frac{x-y-xy}{1+x-y-xy}\right).$$

Comme x, $-y$ et $-xy$ sont >0, le rapport :

$\dfrac{x-y-xy}{1+x-y-xy} \in \,]0, 1[$ donc on a bien $\left|f(x)-f(y)\right| < \left|x-y\right|$ ce qui achève la justification de f 1- Lipschitzienne.

Je me plais à formuler un théorème prouvant l'existence sur ***E***, d'une distance *d**, topologiquement équivalente à *d*, telle que *f* soit contractante relativement à *d**. Dès lors, les résultats afférents aux fonctions contractantes sont conservés.

Après cette longue dissertation, il est grand temps d'entrer dans la chair du sujet. Sortons nos scalpels et apprêtons-nous à disséquer quelques-unes des explications plus insolites, à défaut d'extrapoler nos habitudes de pensée hors de leur contexte, à la manière des gymnastes parfaits dont le propos serait de ne rien faire que d'harmonieux et de rythmé, de rigoureux et de beau.

Théorème

Soit (E, d) un espace métrique compact, $f : E \longrightarrow E$, continue, telle que $\bigcap_{n \geq 0} f^{\,n}(E)$ soit réduite à un élément $a \in E$.

Alors il existe d, distance sur E, topologiquement équivalente à d, telle que f soit d*- contractante.*

Corollaire _ *Soit (E, d) un espace métrique compact, $f : E \longrightarrow E$ vérifiant* **(1)**, *alors f vérifie les hypothèses du théorème.*

On ne peut éluder le fait que la confrontation avec la démonstration soit bien souvent une leçon d'humilité. L'œil ralentit ; un sentiment d'impuissance s'empare de l'âme. Au premier abord, le langage plein d'aplomb de l'assertion mathématique semble constituer une subtile forme de moquerie. Il n'y a aucun remède à cela sinon celui, ancestral, de la pratique et de la volonté de s'armer d'un papier et d'un crayon. Une démonstration mathématique, une fois comprise, est dans sa capacité à forcer la conviction, un miracle de vie éclairée.

There is no avoiding the fact that confrontation with proof is quite often a humbling experience. The eye slows; a feeling of helplessness steals over the soul. At first, it seems as if the confident language of mathematical assertion constitutes a subtle form of mockery. There is no help for any of this save the ancient remedies of practice and a willingness to put pencil to paper. A mathematical argument, once understood, is in its capacity to compel belief a miracle of enlightened life.

Δ !! _ *Répétons-le ! C'est dans la libre expérience du lecteur et dans sa réponse ontologiquement responsable que des jeux de valeur peuvent se jouer par rapport au sens.*

Si je n'ai pas de concepts pour dire ce que je vois, je ne le vois tout simplement pas. Je ne peux donc pas m'oublier, je ne peux pas me perdre, je ne peux pas être ébloui, je ne peux pas rendre grâce. Ce n'est pas la maîtrise qui me manque, c'est la réceptivité. Je suis, en quelque sorte, privé d'*impouvoir*, interdit de gratitude

II. – *Proof of theorem : Il y a ceux qui raisonnent et il y a ceux qui laissent les autres avoir raison.*

Il faut à ce stade, tenir compte du résultat : produire de l'ordre et de la clarté là où il n'y a pour le moment que de la confusion et du désordre. Une grande idée mathématique s'élabore bien souvent par étapes _ *A great mathematical idea is often created in stages.*

Primo : Faire germer une distance $\hat{d}$ toute armée de joie sur E telle que $\forall\,(x, y) \in E^2, \hat{d}\,(f(x), f(y)) \leq \hat{d}\,(x, y)$.

Tout d'abord j'essaie d'apporter _ à travers le *premier lemme* de base, la preuve d'un canon énorme pour déplacer un limaçon de deux microns.

Lemme 1.- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose* $\Delta_n = \sup\limits_{(u, v) \in (f^n(E))^2} d\,(u, v)$.

Alors,
$$\begin{cases} \Delta_n \in \mathbb{R}^+ \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \Delta_n = 0 \end{cases}$$

Proof L'antique démonstration est inattaquable et elle intervient avec l'autorité irritante d'un cauchemar éveillé, l'un de ces sordides épisodes où, disons, un chauffeur de taxi débraillé, pas rasé et sans cou se tourne et vous apostrophe avec insolence mais avec une parfaite et troublante assurance :

The ancient proof is unassailable and proceeds with the irritating authority of a waking nightmare, one of those squalid episodes, say, in which a dishevelled taxi driver, unshaven and no-necked, turns and addresses you insolently, but with perfect and disturbing confidence :

« Hé, mon pote, supposez qu'on puisse poser, $f^{\,0}(E) = E$. Facilitez-vous la vie et supposez-le, c'est tout. » _ I mean like do yourself a favor and just suppose it.

Comme E est compact, il en est de même de $f^{\,n}(E)$, car $f^{\,n}$ est continue (composée de fonctions continues), donc $f^{\,n}(E)$ est bornée et le diamètre de $f^{\,n}(E)$, qui est Δ_n, est fini.
La relation $f^{\,n+1}(E) \subset f^{\,n}(E)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, assure que $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante ; de plus, Δ_n est minoré par zéro, donc $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda \geq 0$.
Je vais montrer que $\lambda = 0$.

Auparavant, on remarque, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, existe $(u_n, v_n) \in f^{\,n}(E) \times f^{\,n}(E)$ tel que $\Delta_n = d\,(u_n, v_n)$.
Cela résulte de ce que d est continue sur le compact $f^{\,n}(E) \times f^{\,n}(E)$ et, par suite, la borne supérieure est atteinte.

En raison de la compacité de E^2, existe φ injection croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers $u \in E$ et $(v_{\varphi(n)})$ converge vers $v \in E$. Prenons p fixé, quelconque ; alors, pour tout $n \geq p$, on a : $u_{\varphi(n)} \in f^{\,(\varphi(n))}(E) \subset f^{\,(\varphi(p))}(E)\,) \subset f^{\,p}(E)$.
Comme $f^{\,p}(E)$, compact, est fermé, on déduit :

$$\lim_{n \to \infty} u_{\varphi(n)} = u \in f^{\,p}(E).$$

D'où, il résulte que _ Vous me suivez, ou quoi ? je me le demande parce qu'on arrive au bout _ You with me, or what ? I'm asking is on account of it's all over

$$u \in \bigcap_{p\geq 0} f^{\,p}(E).$$

De même, *mutatis mutandis*, __ « Une fois effectués les changements nécessaires »

$$v \in \bigcap_{p\geq 0} f^{\,p}(E).$$

La relation $\Delta_{\varphi(n)} = d\,(u_{\varphi(n)}, v_{\varphi(n)})$, donne, par passage à la limite, compte tenu de la continuité de d, $\lambda = d\,(u, v)$.

Comme $\bigcap\limits_{n \geq 0} f^{\,n}(\mathrm{E}) = \{a\}$, on a, $u = v = a$, et alors $\lambda = 0$.

C.Q.F.D.

Là, au contraire, à une structure méthodique toute simple _ qu'y a-t-il de plus simple qu'un point, et unique, et fixe ? un rien du tout théorique et même exactement le minimum de théorie possible _ correspond un maximum de clarté, une cohérence générale : minimum de méthode pour le maximum de résultat ? Supposez un point, vous en tirez un monde.

Lemme 2.- **1**[er]. *Pour tout* $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, *on pose :*

(2) $\widehat{d}\,(x, y) = \sup\limits_{n \in IN} d\,(f^{\,n}(x), f^{\,n}(y))$. *Alors,* $\widehat{d}\,(x, y) \in I\!R^+$

2[e] *Soit* $\widehat{d}$ *l'application de* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *vers* $I\!R_+$ *définie par* **(2)**, *alors :*

$$\begin{cases} \textbf{(α)} \quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \ \widehat{d}(x, y) = d\,(f^{\,n_0}(x),\ f^{\,n_0}(y)) \\ \textbf{(β)} \quad \widehat{d} \ \textbf{est une distance sur E} \end{cases}$$

Proof

1[er.] L'existence de $\widehat{d}\,(x, y)$ est assurée par la majoration

$d\,(f^{\,n}(x), f^{\,n}(y)) \leq \Delta_n \leq \Delta_0$ et toute partie majorée non vide a une borne supérieure.

2[e]**. a)** L'assertion est immédiate si $x = y$; il suffit de prendre $n_0 = 0$.

Prenons $x \neq y$; la convergence de (Δ_n) vers zéro assure_ convergence qui s'articule autour d'une distance fixe mais très, très petite, _ c'est à ce point que les fantômes translucides des nombres infinitésimaux viennent hanter momentanément l'exposé :

$$\exists\, \vartheta \in \mathbb{N} / \ \forall\, n \geq \vartheta \Rightarrow \Delta_n \ \leq \ \frac{1}{2}\, d\,(x, y).$$

par suite,

$$\sup_{n \geq 0}\ d\,(f^{\,n}\,(x), f^{\,n}\,(y)) = \sup_{0 \leq n \leq \vartheta} d\,(f^{\,n}\,(x), f^{\,n}\,(y)).$$

On est ramené à la borne supérieure d'un ensemble fini, d'où l'existence de n_o est acquise. Il va de soi que n_o dépend de x et y !

Δ !! _ La démonstration apporte la transparence en un lieu extrêmement obscur, un rayon de soleil passant par un trou. Derrière la simplicité et la naïveté feinte du lemme 2 se cache une philosophie grandiose. Ce résultat est en tout cas fidèle au but que je me suis fixé : sculpter toute une information opulente dans un noyau de cerise. Mais le chemin est encore long et sinueux, alors patience. Avant de négocier les sinuosités d'une route de montagne, vérifions au **2° b)** _ ci-dessous _ les axiomes d'une distance**.**

(i) L'axiome de séparation résulte de $d \leq \hat{d}$

(ii) La symétrie de $\hat{d}$ résulte de la symétrie de d.

(iii) Enfin, l'inégalité triangulaire résulte de

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\,(x, y, z) \in E^3,$$

$$d\,(f^{\,n}\,(x), f^{\,n}\,(z)) \leq \ d\,(f^{\,n}\,(x), f^{\,n}\,(y)) + d\,(f^{\,n}\,(y), f^{\,n}\,(z)),$$

d'où,

$$d\,(f^{n}\,(x), f^{\,n}\,(z)) \leq \hat{d}\,(x, y) + \hat{d}\,(y, z)$$

et, comme la borne supérieure est le plus petit des majorants

$$\hat{d}\,(x, z) \leq \hat{d}\,(x, y) + \hat{d}\,(y, z).$$

C.Q.F.D.

Δ !! _ Peut-on dire que le savoir a deux façons ? Le souci de vérification et les lourdeurs que demande l'assurance, mais aussi le risque pris, la nouveauté produite, la multiplicité des objets trouvés, bref l'inventivité. Ne nous privons pas de nous demander à ce nouveau carrefour, si sur l'espace topologique métrique, d'autres distances peuvent ou non donner la même topologie.

Définition3 _ *Deux distances sont dites topologiquement équivalentes sur le même ensemble E si elles définissent la même topologie.*

Cela signifie que les distances d et d' vont définir les mêmes ouverts, (même si les boules ouvertes ne sont pas les mêmes : ne pas oublier le facteur réunion de boules ouverts…)

Lemme 3.- *La distance* $\widehat{d}$ *est topologiquement équivalente à* d**.**

Proof

L'inégalité $d \leq \widehat{d}$ assure que $\mathrm{Id} : (E, \widehat{d}) \longrightarrow (E, d)$ est continue.

Il reste à montrer que $\mathrm{Id} : (E, d) \longrightarrow (E, \widehat{d})$ est continue.

Cela revient à montrer que pour $x \in E$ quelconque et pour toute suite (x_k) d'éléments de E, d – convergente vers x, alors (x_k) est $\widehat{d}$ – convergente vers x.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe d'après le **lemme 2**, un plus petit entier $\varphi(k) \geq 0$ tel que :

$$\widehat{d}(x_k, x) = d(f^{\varphi(k)}(x_k), f^{\varphi(k)}(x)).$$

On veut montrer que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k_o \in \mathbb{N} / \forall\, k \geq k_o \Rightarrow \widehat{d}(x_k, x) \leq \varepsilon.$$

La convergence vers zéro de (Δ_n) se traduit par :

$$\exists\ \vartheta_o \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq \vartheta_o \Rightarrow \Delta_n \leq \varepsilon.$$

Explicitons la continuité en x des f^j pour $j \in \{0,1,\ldots,\vartheta_o\}$;

Comme ces fonctions sont en nombre fini,

$$\exists\ \eta > 0 /\ \forall\ j \in [0, \vartheta_o]\ \forall\ u \in E,$$

$$d(u, x) < \eta \Rightarrow d(f^j(u), f^j(x)) \leq \varepsilon.$$

Ensuite, la d- convergence de (x_k) vers x assure

$$\exists\ k'_o /\ \forall\ k \geq k'_o \Rightarrow d(x_k, x) < \eta.$$

Prenons alors $k_o = k'_o$, et k quelconque, $k \geq k_o$;

Deux cas se présentent :

_ soit $\varphi(k) \geq \vartheta_o$, alors

$$\hat{d}(x_k, x) = d(f^{\varphi(k)}(x_k), f^{\varphi(k)}(x)) \leq \Delta_{\varphi(k)} \leq \varepsilon\ ;$$

_ soit $\varphi(k) < \vartheta_o$, mais alors, $d(x_k, x) < \eta$,

d'où

$$\hat{d}(x_k, x) = d(f^{\varphi(k)}(x_k), f^{\varphi(k)}(x)) \leq \varepsilon\ ;$$

ce qui assure la $\hat{d}$ – convergence de (x_k) vers x.

Pour conclure cette première étape, montrons que $\hat{d}(f(x), f(y)) \leq \hat{d}(x, y)$.

On a, par définition,

$$\hat{d}\,(f\,(x), f\,(y)) = \sup_{n \geq 0}\ d\,(f^{\,n+1}\,(x), f^{\,n+1}\,(y)) = \sup_{n \geq 1}\ d\,(f^{\,n}\,(x), f^{\,n}\,(y)),$$

Ce qui donne l'inégalité demandée. ***Quod erat demonstrandum*** disent les latinistes.

Ce sont des objets déplaisants, ces distances sans nombre, ne serait-ce que parce que, comme des chiens sans poils, elles exhibent leurs défauts de manière aussi provocante. _ These are unlovely objects, those numberless distances, if only because like hairless dogs they exhibit their deficiencies so defiantly. (*rires…*)

***Secundo*: Diffus dans ma création, tout à la fois, je m'y dissimule et m'y perds, et je m' y retrouve sans cesse, au point de me confondre avec la construction de *d**.**

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose $n\,(x) = \sup\,\{n \in \mathbb{N} / \ x \in f^{\,n}\,(\mathrm{E})\}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on pose $\vartheta\,(x, y) = \inf\,(n\,(x), n\,(y))$.

On donne $\mathrm{L} \in\ ]0, 1[$, et pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on pose

$$\lambda\ (x, y) = \begin{cases} \mathrm{L}^{\,\vartheta\,(x\,,y)}\,.\,\hat{d}\,(x\,,y) \ \text{ si } \vartheta(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \text{ si } \vartheta(x\,,\,y) = +\infty. \end{cases}$$

Voilà l'exposé pris dans un nœud de concepts. Regardez un peu cette couronne d'épines. _ *The discussion is now embedded in a tangle of concepts. Just look at this crown of thorns.* C'est dans le calcul différentiel que, pour la première fois, l'infini est charmé jusqu'à la docilité, sa luxuriante subordonnée au dur concept d'une limite. _ *It is within the calculus that for the first time the infinite is charmed into compliance, its luxuriance subordinated to the harsh concept of a limit.*

Δ !! N'oublions pas que toute lecture d'un concept est une perpétuelle réinvention.

Lemme 4.- *Pour tout* $(x, y) \in E^2$, *on a* $\lambda\,(f(x), f(y)) \leq L.\,\lambda\,(x, y)$.

Proof

Pour tout $x \in$ E, cherchons une relation entre $n(x)$ et $n\,(f(x))$.

On distingue deux cas :

(i) si $n\,(x)$ est infini, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in f^{\,n}$ (E), donc

$$f(x) \in f^{\,n+1}\,(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad n\,(f(x)) = +\infty$$

(ii) si $n\,(x) = n_\circ \in \mathbb{N}$, alors $x \in f^{\,n_\circ}$ (E) et $x \notin f^{\,n_\circ+1}$ (E) ;

d'où

$$f(x) \in f^{\,n_\circ+1}\,(\mathrm{E}),$$

et alors

$$n\,(f(x)) \geq n\,(x) + 1.$$

Pour démontrer l'inégalité proposée, on considère deux cas :

(i) si $\vartheta\,(x, y) = +\infty$, alors $n\,(x) = n\,(y) = +\infty$

et *idem* pour $n\,(f(x))$ et $n\,(f(y))$, d'où $\lambda\,(f(x), f(y)) = 0$.

Et l'inégalité à justifier est vraie.

(ii) si $\vartheta\,(x, y)$ est fini, on suppose, sans restreindre la généralité, $n\,(x) \leq n\,(y)$; alors $\vartheta\,(x, y) = n\,(x)$.

On a

$$\vartheta\,(f\,(x), f\,(y)) = \inf\,(n\,(f\,(x)), n\,(f\,(y)).$$

Comme $n\,(f\,(x)) \geq n\,(x) + 1$ (valable dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$),

On a $1 + \vartheta\,(x, y) \leq \vartheta\,(f\,(x), f\,(y))$

Et, comme $L \in \,]0, 1[$,

$$L^{\vartheta(f\,(x),\, f\,(y))} \leq L^{1+\vartheta\,(x,\, y)},$$

d'où

$$\lambda\,(f\,(x), f\,(y) = L^{\vartheta(f\,(x),\, f\,(y))}\,\widehat{d}\,(f\,(x), f\,(y)),$$

$$\lambda\,(f\,(x), f\,(y) \leq L^{1+\vartheta\,(x,\, y)}.\,\widehat{d}\,(x, y)$$

(d'après la conclusion de la première étape).

Ainsi, en revenant à la définition de λ, on obtient

$$\lambda\,(f\,(x), f\,(y) \leq L.\,\lambda\,(x, y).$$

C.Q.F.D.

Δ !! _ Le raisonnement général est très simple, très compact et très puissant.
C'est une blague, c'est ça ? _ ceci sur le ton d'incrédulité qu'on réserve d'ordinaire au vieil ami venu annoncer sa retraite imminente dans un ashram.

The overall argument is very simple, very compact, and very powerful. You're putting me on, right? *This said with the tone of incredulity with which on ordinary occasion we treat an old friend's announcement that he is about to depart for an ashram.*

Construction de d^* _ Pour $(n, x, y) \in \mathbb{N}^* \times E^2$,

On définit

$$\Omega_{n,x,y} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \,/\, x_1 = x \text{ et } x_{n+1} = y\}$$

$$S_{n,x,y} = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda(x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^+ \,/\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega_{n,x,y}\}$$

$$d^*(x, y) = \inf\left(\bigcup_{n \geq 1} S_{n,x,y}\right)$$

Lemme 5 _ *d^* est une distance sur E*

Proof

(i) L'axiome de symétrie est immédiat car $S_{n,x,y} = S_{n,y,x}$.

(ii) Montrons que pour $x \neq y$, on a $d^*(x, y) > 0$.

Comme $x \neq y$, on ne restreint pas la généralité (compte tenu de la symétrie) à supposer que $x \neq$ a.

Prenons alors $m \in \mathbb{N}^*$, un entier quelconque, et $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ un $(m + 1) -$ *uplet*, avec $x_1 = x$ et $x_{m+1} = y$. On pose

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda(x_i, x_{i+1}).$$

On distingue alors deux cas

Premier cas.- Ou bien il existe un plus petit entier $j \in [2, m - 1]$ tel que $\vartheta(x_j, x_{j+1}) > n(x)$;

alors, pour $k \in [1, j - 1]$, $\vartheta(x_k, x_{k+1}) \leq n(x)$

et on a

$$A \geq L^{n(x)} \sum_{k=1}^{j-1} \hat{d}(x_k, x_{k+1}) \geq L^{n(x)} \hat{d}(x, x_j)$$

et comme $n(x_j) > n(x)$, on déduit que

$$L^{n(x)} \hat{d}(x, x_j) \geq L^{n(x)} d(x, f^{n(x)+1}(E)) > 0.$$

Deuxième cas.- Ou bien, pour tout $j \in [1, m\text{-}1]$,

$$\vartheta(x_j, x_{j+1}) \leq n(x)\,;$$

alors,

$$A \geq L^{n(x)} \hat{d}(x, y) > 0.$$

Ainsi, on déduit

$$d^*(x, y) \geq L^{n(x)} \inf(\hat{d}(x, y), d(x, f^{n(x)+1}(E)) > 0.$$

(iii) soit $(x, y, z) \in E^2$ et $\varepsilon > 0$, quelconque ; la définition de $d^*(x, y)$ et $d^*(y, z)$ entraînent qu'existe $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ avec $u_1 = x$, $u_{n+1} = y$, puis $(v_1, \ldots, v_{m+1})$ avec $v_1 = y$, $v_{m+1} = z$

tels que
$$\begin{cases} d^*(x, y) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda(u_i, u_{i+1}) - \frac{\varepsilon}{2} \\ d^*(y, z) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda(v_i, v_{i+1}) - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

De même, par définition de la borne inférieure,

$$d^*(x, z) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(u_i, u_{i+1}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda(v_i, v_{i+1}).$$

Finalement,

$$d^*(x, z) \leq d^*(x, y) + d^*(y, z) + \varepsilon,$$

Ce qui donne l'inégalité triangulaire.

Quod erat demonstrandum, as Latinists like to say

∆ !! _ Je ne sais ce qui me fait dire que nous sommes libres dans le lieu de l'*a-Logos. Le* terme grec devient en latin *surdus.* En anglais un *surd* est une racine algébrique qui ne peut pas s'exprimer en termes finis. Elle est en dehors du mesurable et du décidable. Étymologiquement, « *surd* » garde en soi le sens précédent de « sans voix ». Et là, il se rapproche du non dit et du muet, de la zone opaque de la «*surdité* », et de l' « *ab-surdité* ». Chacune de ces aires de définition et de connotation est pertinente.

Lemme 6.- *d^* est topologiquement équivalente à $\hat{d}$*

***Proof* :** *Allez en avant et la foi vous guidera,* aurait dit d'Alembert, un conseil que l'on continue, pour ce qui est de la topologie, à offrir pieusement aux étudiants de première année (avec, ajouterai-je, des résultats entièrement prévisibles).

Allez en avant et la foi vous guidera, d'Alembert was reputed to have said: *Go and advance and faith will come to you,* advice that with respect to the topology is still offered piously to undergraduates (with, I might add, entirely predictable results).

En revenant aux définitions, on a

$$d^* \leq \lambda \leq \hat{d}.$$

Il me reste à montrer que **si** (x_n) est d^*- convergente vers x, **alors** (x_n) est $\hat{d}$- convergente vers x.

Supposons que $(\hat{d}(x_n, x))$ ne converge pas vers zéro, alors il existe $\varepsilon > 0$

et une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \hat{d}(x_{\varphi(n)}, x) \geq \varepsilon$.

Comme $(E, \hat{d})$ est compact, existe à nouveau Ψ injection croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi\Psi(n)})$ soit $\hat{d}$- convergente vers $z \in E$; mais l'inégalité $d^* \leq \hat{d}$ entraîne :

$$\lim_{n \to +\infty} d^*(x_{\varphi\Psi(n)},\ z) = 0,$$

d'où $z = x$, ce qui est absurde, puisque $\hat{d}\,(x_{\varphi\Psi(n)}, x) \geq \varepsilon$.

Ainsi d^* et $\hat{d}$ sont topologiquement équivalentes. C.Q.F.D.

Conséquence.- Par transitivité, d et d^* sont topologiquement équivalentes.

Je vais montrer enfin que f est d^*- *contractante*.

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\varepsilon > 0$; il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ tel que

$$x_1 = x,\ \ x_{n+1} = y \ \text{ et } \ d^*(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda\,(x_i, x_{i+1}) < d^*(x, y) + \varepsilon.$$

Comme

$$d^*(f(x), f(y)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda\,(f(x_i, f(x_{i+1}))$$

et, en appliquant le **lemme 4**, on a

$$d^*(f(x), f(y)) \leq L \times \sum_{i=1}^{n} \lambda\,(x_i, x_{i+1}).$$

On déduit $d^*(f(x), f(y)) \leq L\, d^*(x, y) + L\,\varepsilon$, d'où $d^*(f(x), f(y)) \leq L\, d^*(x, y)$.

Δ !! _ Par le biais du tact conceptuel, _ six lemmes au total, on retire un inestimable profit de compréhension (d'intensité de rencontre) du théorème démontré.

§ _ Une méthode est bonne si et seulement si elle donne de bons résultats. Même en mathématiques, l'imagination joue les premiers coups. Voulez-vous parler de l'invention ? Comment faire sans invoquer cette émotion fulgurante, obscure et difficile à définir qu'on appelle l'intuition ? L'intuition est la chose du monde la plus rare, mais la mieux partagée par les inventeurs, qu'ils soient artistes ou savants. Oui, elle joue _ et frappe _ les premiers coups.

Démonstration du corollaire.- Toute application f vérifiant (1) est continue. Ensuite, le théorème sur les fermés emboîtés dans un compact assure que $\bigcap_{n \geq 0} f^n(E) \neq \emptyset$.

Posons $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(E)$ et $A_n = f^n(E)$; on sait que

A_n et A sont des compacts de E. Tout d'abord,

$$\bigcap_{n \geq 0} A_n = E \cap \Big(\bigcap_{n \geq 1} A_n\Big) = \bigcap_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n \geq 0} A_{n+1}.$$

Ensuite, montrons que $f(A) = A$.

Nous vivons des temps désordonnés. Les choses paraissent souvent *dis*continues et presque toujours chaotiques. La théorie des quanta semble indiquer, surtout à ceux qui ne l'ont pas étudiée, qu'à un certain niveau d'analyse les quanta sautent de-ci de-là sans la moindre raison valable. Il est bon de rappeler, ne serait-ce que pour le sentiment de quiétude que cela procure, que le calcul différentiel fut créé par des hommes qui regardaient un monde différent, un grand panorama dans lequel les processus naturels étaient tous clairement continus.

We live in disorderly times. Thing seem often *dis*continuous and almost always chaotic. Quantum theory suggests, especially to those who have not studied it, that on some level of analysis, quanta bounce around for no good reason whatsoever. It is worth remembering, if only for the sense of calm that it provides, that the calculus was created by men who looked out on a different world, one in which the great panorama of natural processes were all them clearly continuous.

Soit $y \in f(\bigcap_{n\geq 0} A_n)$, alors existe $x \in \bigcap_{n\geq 0} A_n$ tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in A_n$ pour tout n, il suit que $f(x) \in f(A_n)$ pour tout n ;

ainsi $f(x) \in \bigcap_{n\geq 0} f(A_n)$, d'où

$$f(\bigcap_{n\geq 0} A_n) \subset \bigcap_{n\geq 0} f(A_n).$$

Inversement, soit $x \in \bigcap_{n\geq 0} f(A_n)$, posons

$$A'_n = A_n \cap f^{-1}(\{x\}).$$

Dès lors, $A'_n \neq \varnothing$; $f^{-1}(\{x\})$ est un fermé dans le compact E, d'où, c'est un compact, et par suite, (A'_n) est une suite décroissante de compacts tous non vides ; il en résulte que :

$$\bigcap_{n\geq 0} A'_n \neq \varnothing.$$

Or,

$$\bigcap_{n\geq 0} A'_n = (\bigcap_{n\geq 0} A_n) \cap f^{-1}(\{x\}) \neq \varnothing.$$

Ainsi, il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$ et $x \in A_n$ pour tout n, d'où $x \in f(\bigcap_{n\geq 0} A_n)$.

En résumé,

$$f\Big(\bigcap_{n\geq 0} A_n\Big) = \bigcap_{n\geq 0} f(A_n) = \bigcap_{n\geq 1} f^{\,n+1}(E) = \bigcap_{n\geq 0} f^{\,n}(E), \quad \textit{i.e.} \qquad f(A) = A.$$

Δ !! _ Pour représenter le monde réel, le calcul différentiel subordonne les processus aux fonctions _ c'est *cela* son impulsion la plus irrésistible _ et la définition de la continuité doit donc avoir pour objet une déclaration selon laquelle une fonction est continue au cas où _ suit un instant de flottement bien naturel pendant lequel le brouillard habituel se remet en place. Au cas où *quoi ?* Le premier essai de définition procède par imitation. Une fonction à valeurs réelles f est continue si son comportement ne présente aucune rupture. C'est là que l'imagination s'efforce de faire apparaître dans un miroir purement mathématique cette ininterruption fondamentale qui participe si manifestement du monde réel. Et c'est là, inévitablement, que le miroir se trouble et renvoie plutôt que les images éclatantes du monde quelque chose de turbide et d'impur.

In its representation of the real world, the calculus subordinates processes to functions _ that is its most compelling impulse _ and so a definition of continuity must have as its aim a statement to the effect that a function is continuous just in case _ and there follows, of course, a moment of confusion in which the familiar fog rearranges itself. Just in case *what*? A first essay at a definition proceeds by imitation. A real-valued function f is continuous if in its behaviour it has no gaps. It is here that the imagination endeavours to evoke within a purely mathematical mirror that essential seamlessness so plainly a part of the physical world. And here inevitably the mirror becomes cloudy, returning for the world's bright images something turbid and unclean.

Montrons enfin que A $\neq \varnothing$ se réduit à un élément.

Si A a strictement plus qu'un élément ;

On a $\Delta(A) = d(u, v)$ (on note $\Delta(A)$ le diamètre de A) où $(u, v) \in A^2$ et $u \neq v$.

(Toujours la compacité !)

Par suite,

$$\Delta(f(A)) = d(f(\alpha), f(\beta)) \quad \text{où} \quad (\alpha, \beta) \in A^2, \alpha \neq \beta\,;$$

D'après la définition de f, on déduit

$$\Delta(f(A)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) \leq \Delta(A),$$

i.e.

$$\Delta(f(A)) < \Delta(A),$$

ce qui est absurde.

Par suite, A est un singleton, et le corollaire n'est plus chargé d'énigmes.

Peut-être que l'école m'a transmis ça : l'idée que la Mathématique est mon palais intérieur, que la beauté des équations est l'horizon, que la grammaire ou la théorie mathématique est le plancher et que les théorèmes, de chaque côté, sont les cloisons de la maison.

La lecture est une amitié (Marcel Proust).

L'école que nous devrons réinventer est, par excellence, le lieu où l'on doit apprendre à lire.

Ce faisant, elle a l'obligation minimale de mettre l'admiration au cœur du projet éducatif.

∆ !! _ C'est presque un truisme que de relever que la dure clarté, la rage de la définition, et l'aspect final (*perfectum*) du théorème et de son corollaire qui en dérive, traduisent une codification, dans la vie et la migration des concepts. Le lecteur grammairien, au sens que je m'efforce de cerner, entend, ressent les ressources du sens à l'œuvre sous la surface. Il rencontre la structure nerveuse et osseuse qui porte l'idée et son contenu, les relations spatiales et chromatiques sur la toile, les dimensions de la nef. Il apprend à entendre les tonalités et hauteurs de son qui constituent la grammaire de la musique.

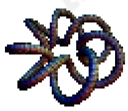
Lire un théorème, c'est donc soumettre sa curiosité et son désir à un déplacement continuel d'une idée à l'autre, d'une action à l'autre, d'un niveau de l'énoncé à l'autre. Le théorème que nous cherchons à démontrer se dévoile progressivement devant nous, tout à coup il nous accueille sans s'expliquer, et nous avons enfin accès à ce théorème, qui devrait faire désormais partie intégrante de notre être. Dans ce voyage, nous avançons pas à pas en direction d'un délinéament de l'espace donné ; nos perceptions sont de plus en plus correctement incidentes à la circonférence des intentions et des sens possibles. Mais la congruence n'est jamais parfaite.

La Beauté est Vérité, la Vérité est Mathématique

Essayons de comprendre que faire des Maths, c'est d'abord consentir à un héritage, être le légataire d'une histoire. Voulons-nous la continuer, la reprendre à notre compte ou préférons-nous nous alléger de ce fardeau ? Malheureusement, la tendance actuelle va plutôt vers la désaffiliation.

Pourtant, les théories mathématiques et le passé qu'elles constituent sont pour nous une source d'inspiration et une espèce de défi. Elles ne nous laissent pas tranquilles. Elles exigent de nous que nous les comprenions, que nous soyons à la hauteur de leur intelligence et de leur langage.

J'ajouterais que la Mathématique est une éducation de la sensibilité. Notre perception est aussi fonction de notre pouvoir d'énonciation et donc des théories que nous avons étudiées. Dans la mesure où elle nous éduque à la beauté, la Mathématique nous donne les moyens, nous ouvre les yeux sur la variété des paysages. Nous avons besoin d'un détour par l'abstraction pour comprendre quelque chose à ce que nous sommes. Si nous voulons embellir l'enseignement scientifique, ou à tout le moins éviter qu'il ne s'enlaidisse irrémédiablement, il faut que nous puissions acquérir et transmettre le sens de la beauté.



RÉ-CRÉATION

C'est sur ce sensible miroir que ma création tout entière infléchie se colore et s'émeut… Qu'il me soit permis de partager une impression de bonheur intellectuel face à ce concept d'application contractante. Perché sur les épaules de mes maîtres, j'ai essayé de suivre la trace d'une vérité centrale assez suggestive pour faire de la finesse de la distinction une distraction futile.

Pour revenir à **Mallarmé**, le poète qui, à mon sens approcha au plus près les problèmes qui me préoccupent, je voudrais rapporter une anecdote. **Mallarmé**, on le sait, était maître dans l'art de la rhétorique poétique, dont il connaissait et maîtrisait les moindres figures. Il passa en son temps, et passe encore aujourd'hui, pour un poète hermétique. Mais qu'est-ce, finalement, que l'hermétisme, si ce n'est utiliser un langage chiffré, un code à déchiffrer dans un contexte clair ? Qu'est-ce que l'hermétisme si ce n'est d'une certaine façon, l'introduction subtile d'un langage de type mathématique au cœur de la poésie ? Je ne sais si **Mallarmé** serait d'accord avec cette définition…

Un de ses amis, qui mariait sa fille, lui demanda un jour d'écrire un poème pour la circonstance. **Mallarmé** se prêtait souvent à ce genre d'exercice. Mais comme il revenait tout juste d'un voyage, il n'eut guère le temps d'écrire ce poème et s'exécuta pratiquement sur-le- champ. Il lut son poème au cours de la cérémonie. Après la lecture, son ami, à la fois heureux et étonné, lui dit : « Mais c'est extraordinaire ! Ce poème est entièrement compréhensible. Comment as-tu fait ? » Et **Mallarmé** de lui répondre : « Cher ami, tu m'as prévenu au dernier moment. Je n'ai pas eu le temps d'être obscur ! » J'aime beaucoup cette anecdote, car elle règle son compte à la question de la lisibilité (ou de l'illisibilité) de la poésie moderne. L'hermétisme de **Mallarmé** était un hermétisme voulu, conscient, un sens, une charge, un symbole supplémentaire incorporé à son poème. En somme, l'obscurité, ou ce que l'on croît être obscurité, est une dimension supérieure ajoutée au langage.

Après un long dialogue sur des problèmes trop difficiles, on se permet l'anecdote. Et j'espère que vous la permettez, parce que c'est en racontant des histoires que l'on essaie de comprendre.

L'importance cruciale de la valeur, du jugement de goût.

Je ne conseillerai à personne de priver un enfant de cette aventure, de la traversée du fleuve, de cette richesse, de ce trésor que je n'ai jamais pu épuiser, puisqu'il contient le virtuel de l'apprentissage, l'univers de la tolérance et le scintillement solaire de l'attention.

Être enseigné n'est pas seulement un moyen, c'est un but, c'est une délivrance, c'est une ouverture, c'est le bonheur d'un devenir autre, c'est comme le rappelle l'étymologie du mot école, la forme suprême du loisir. Nous l'avons oublié. Là, dans cet oubli, plus encore que dans l'incapacité d'offrir à nos étudiants un avenir désangoissé, réside, me semble-t-il, notre faillite la plus grave. Car, à la différence des vicissitudes d'une économie mondialisée, elle nous est entièrement imputable.

La conviction dans le domaine de l'enseignement est la transmission d'une technique de raisonnement. Pour convaincre que la théorie des espaces métriques fonctionne, il me faut en dire les limites. Avant d'essayer de la transmettre, car c'est cela, convaincre, je dois l'avoir comprise. L'ennui de la pédagogie est de prétendre transmettre des choses que l'on n'a pas vraiment comprises. Une fois que j'ai compris une théorie, je l'ai comprise complètement. Par exemple, j'ai tout compris de la définition d'une distance topologiquement équivalente ; d'une application contractante voire lipschitzienne. Je peux en comprendre la totalité car c'est une théorie inventée par les hommes comportant ses limites.

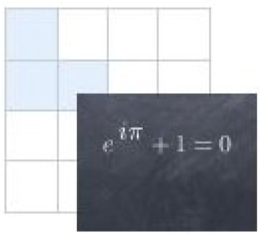
Le feu de la créativité mathématique : qui sait pourquoi il brûle ou à quel endroit ?

The fire of mathematical creativity _ who knows why it burns or where?

Car si les concepts sont bien de feu, comment ne se consumeraient-ils pas eux-mêmes ?

C'est Euler qui vit et comprit que les fonctions exponentielles et trigonométriques étaient liées, et chacune d'elles définissable en faisant appel à l'autre. Et c'est lui qui découvrit la formule la plus belle de toutes les mathématiques : $e^{i\pi} + 1 = 0$, expression mystérieuse et ineffable qui relie les uns aux autres les cinq nombres les plus importants de l'Univers.

It was Euler who saw and understood the fact that exponential and trigonometric functions are related, each definable by an appeal to the other. And it was Euler who discovered the most beautiful formula in all of mathematics: $e^{i\pi} + 1 = 0$, *a mysterious and ineffable expression connecting the five most important numbers in the universe.*



Δ !! _ La culture scientifique devient désirable si elle n'énonce pas seulement les lois, les équations, les résultats mais nous permet de saisir les passions singulières qui les ont voulus, pensés et créés.

J'apprécie particulièrement cette équation d'Euler, pour sa simplicité d'abord, mais aussi parce que je la trouve belle. Elle n'a rien à vendre et croit qu'il existe une certaine valeur du «gratuit ». Son discours, qui n'a pas le ton *quasi-publicitaire* d'une certaine communication scientifique, réussit à « *re-érotiser* » l'acte de connaître. Elle m'oblige dans mon petit théâtre personnel, à enseigner la Mathématique d'une façon si **possible vivante et originale, et de tenter de questionner avec malice ses implications philosophiques et poétiques.**

La Mathématique s'est offerte à moi, comme la pierre de rosette, comme une chaîne de hiéroglyphes derrière lesquels se cache, un mystère, un secret absolu, merveilleux, irremplaçable. Dès lors, je suis rentré dans cette discipline avec le désir de maîtriser, un jour, la syntaxe d'une langue étrangère.

J'aime décidément la joie que procure la pensée mathématique. La Mathématique m'apprend que la joie est une force majeure, et qu'il y a plus de lucidité à être joyeux malgré le monde qu'à incriminer le réel au point de vouloir lui en substituer un autre. C'est une leçon magistrale. C'est aussi la raison pour laquelle j'écarte toute tentative d'abandonner l'enseignement, au profit de ce que j'ai envie de faire aimer.

Je suis scientifique parce que je suis convaincu que la perte de la certitude est un même temps l'invitation au méta-point de vue. L'acquisition de la relativité n'est pas la chute dans le relativisme. Toute découverte d'une limite à la connaissance est en elle-même un progrès de connaissance. Toute introduction de la contradiction et de l'incertitude peut se transformer en gain de complexité. C'est dans ce sens que la limitation apportée par la physique quantique à la connaissance déterministe/mécaniste se transforme en un élargissement complexificateur de la connaissance, et prend un sens pleinement épistémologique…

Pourquoi cette *conviction* dans le domaine de l'enseignement ? Parce que, même si j'étais en enfer, ce serait ma manière d'être.

J'ai choisi d'enseigner la Mathématique, parce qu'elle me paraissait génératrice d'"épiphanies". Une manière d'expérimenter la grâce hors du champ du sacré. La Mathématique m'a permis de découvrir des alliés insoupçonnés parmi la communauté des penseurs – vivants et morts –, mais aussi parmi les grandes théories du monde : *la théorie de la mesure et de l'intégrale abstraite*, par exemple. La Mathématique m'apprend que faire preuve d'ignorance rationnelle ne va pas forcément contre moi, que ne pas comprendre n'est pas qu'un échec, qu'il faut du temps pour qu'une certaine intelligence du réel émerge. Ne pas comprendre est merveilleux. Poser des questions est l'oxygène de l'être.

La Mathématique fournit une sève nouvelle à l'imagination et aide à l'émerveillement : elle est ma manière d'être au monde, une façon de trouver ma filiation avec les autres êtres. Je pense qu'il y a du "grain à moudre " pour l'intelligence, quand on s'intéresse aux *formulations séquentielles* ou aux *intégrales généralisées* et, comme d'autres, j'essaie de participer à leur fabrication, en élaborant des contenus puis en les mettant à la disposition de tous. La communication, mathématique douce, seule alternative à la maîtrise ?

Sans doute l'enseignement m'a-t-il aidé à penser ma place dans l'institution. Sans doute m'a-t-il donné aussi le goût des autres, en me faisant voir quel type de lien je pouvais avoir avec eux…

Invitation au voyage

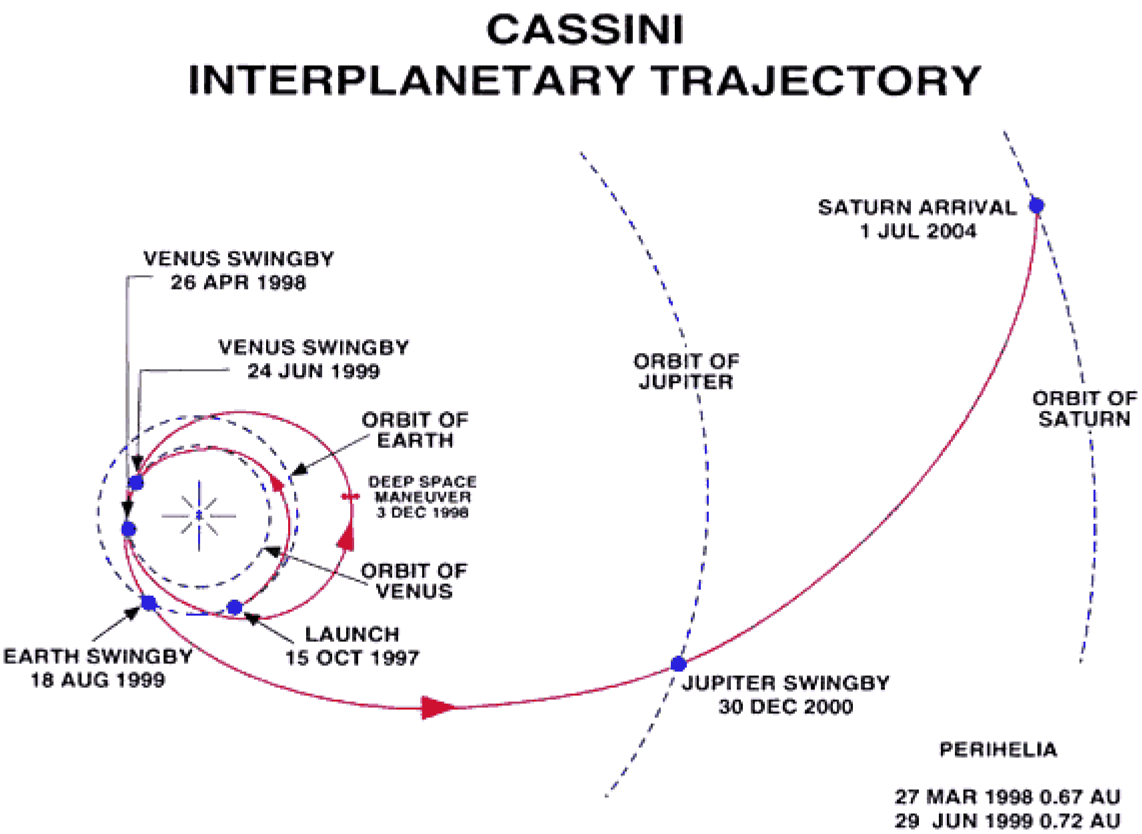


Image d'une recherche palpitante, j'étale ci-dessus, peintre recréateur, l'exploration la plus tremblante et la plus vive de trois ans de bonheur d'une vie consacrée, minute par minute, dans l'enthousiasme

Théo Héikay-Universitaire/pdf