Andrew Wiles et le « grand Théorème de Fermat »

Écrirai-je, et me comprendrez-vous si je vous dis que je ressens une impression de bonheur intellectuel face au petit documentaire sur Andrew WILES, médaille Fields de Mathématiques en 1998, pour sa démonstration du grand théorème de Fermat mais aussi de la conjecture affirmant que : toute courbe elliptique est modulaire. On devrait montrer ce documentaire à tous les futurs élèves scientifiques. Montrer que la solitude peut-être importante dans une activité de recherche. Que la sèche est consubstantielle à une recherche productive. Autrement dit, une œuvre qui compte est un cri de solitude, un besoin. J'ai compris en visionnant hier depuis mon quartier général d'Aix-en-Provence (21 mars 09) ce documentaire avec ma petite famille, que charnellement, la saveur physique d'une pensée, le goût d'une idée peut s'infiltrer dans la peau d'un être pour gagner d'un coup d'aile magique ses mains, ses bras et son visage. J'ai déjà eu une chance invraisemblable de rencontrer son œuvre au cours d'un séminaire sur les travaux du mathématicien Jean-Pierre Serre à Paris. J'eus un choc quasiment physique quoique je n'aie rien compris à l'époque de sa démonstration, pas plus que je ne comprends aujourd'hui même l'intégralité de cet édifice. Wiles est ainsi devenu à part entière un pan de mon âme et de ma respiration. Lorsque je me promène dans un bois, je sens ce théorème se profiler dans ma démarche. Affirmer que : les courbes elliptiques sont modulaires, c'est changer notre propre conception des courbes. Très peu d'hommes ont en eux le rythme et la cadence intérieure de ce qu'ils ont crée. Certains scientifiques _ Wiles en fait partie _, certains érudits font figure d'exception en se montrant à la hauteur de leurs travaux. Mais ils sont rares, et le décalage que l'on rencontre chez les autres est époustouflant.

J'ai du mal à comprendre pourquoi certains profs mais aussi certains inspecteurs excluent tout contact physique avec le concept, pourquoi ils n'aimeraient guère entendre « la saveur de l'idée sur le concept ».

Je pense donc que ce ne sont pas les classements divers qui ont leur importance, ce sont les être en action qui font de leur vie une ouverture et un accueil.
Qu'entent-on par formes modulaires ? C'est avec cette question simple mais divinement énigmatique que commencent les découvertes les plus récentes de la Théorie des Nombres. C'est une question simple, parce que la structure de la réponse a déjà été prédite : quoi que le mathématicien propose, mieux vaut que ce soit une opération supplémentaire de l'arithmétique ; _ Les formes modulaires pourraient être considérées comme la troisième opération fondamentale de l'arithmétique _ et je profite de ce moment pour saluer l'audace qui motive cette exigence, la folle conviction qu'il *existe* une opération *pouvant* exprimer notre appréciation entièrement sensuelle du fait qu'il y a un *truc* à comprendre au-delà des formes modulaires. C'est en même temps une question divinement énigmatique, parce qu'elle se trouve à cheval entre une demande péremptoire, celle d'une découverte _ *dites donc, allez me trouver les fonctions analytiques et les courbes elliptiques* _ et une autre non moins péremptoire, celle d'une définition _ *dites donc, qu'est-ce que vous entendez par courbes elliptiques ?* _ Ce qui suggère une fois encore que les mathématiciens ont fondamentalement pour effet de donner le jour à quelque chose par un simple choix de mots. Mais cette question affiche, fallait-il le préciser une trompeuse simplicité. Les formes modulaires sont d'une certaine manière, les fonctions complexes à symétrie accessibles. Les symétries internes des formes modulaires ne sont visibles

qu'à l'intérieur d'un espace hyperbolique. Or selon la **conjecture de Taniyama – Shimura, toute courbe elliptique est une forme modulaire déguisée.** Wiles savait que la conjecture de Taniyama – Shimura impliquait le grand Théorème de Fermat. Une remarque s'impose ici : L'usage voulant qu'on puisse donner à un Théorème le nom de celui qui en a apporté la preuve, l'appellation de « Théorème de Fermat » ne se justifie donc pas, rigoureusement. Il serait souhaitable de parler soit d'une « conjecture de Fermat », soit du « Théorème de Wiles ».

Wiles est donc le premier à avoir trouver une méthode dénombrant à la fois les courbes elliptiques et les formes modulaires. Le dénombrement ne pouvait se faire par ordinateur car on a ici à faire aux nombres infinis. Il fallait donc une preuve mathématique. L'idée géniale de Wiles, était de transformer les courbes elliptiques à ce qu'on appelle les représentations de Galois. Il lui suffisait alors dans un deuxième temps d'utiliser le Théorie d'Iwasawa afin d'achever sa méthode de comptage. La théorie d'Iwasawa est sensée créer ce qu'on appelle une formule de classe de nombres.
Le raisonnement d' Andrew WILES est très joli mais il est aussi très difficile, sa complexité tenant à ce qui transcende la logique ainsi qu'aux mathématiques. *Son charme particulier, écrivait Gauss qui s'était tout comme Cauchy risqué à la démonstration, vient de la simplicité de l'énoncé jointe à la difficulté des preuves.* Rares sont les lecteurs, capables de le suivre sans problème d'un bout à l'autre. Derrière les détails se dissimule un drame plus général, celui des relations nouées entre les idées. Une démonstration mathématique est un exercice littéraire stylisé, rappelant ici une épopée _ Il n'existe pas de *naturels* non nuls, x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1, 2\}$.

Il est clair qu'il existe une infinité de solutions pour les premières valeurs de n. Le cas $n = 1$ est trivial. Le classique $3^2 + 4^2 = 5^2$ soit $9 + 16 = 25$ ou $169 = 25 + 144$, ou encore $29\text{x}29 = 21\text{x}21 + 20\text{x}20$ est une solution du cas $n = 2$. Plus généralement, les triplets :

$$\begin{cases} x = 2kml \\ y = k(m^2 - l^2) \\ z = k(m^2 + l^2) \end{cases}$$

sont des solutions non triviales pour $n = 2$, avec $k \in \mathbb{N}$, $m > l$, m et l étant de parités différentes. Ce triplet, est connu sous l'appellation, « triplet de Pythagore ». En revanche, pour $n > 2$, $x^n + y^n \neq z^n$. Il n'existe donc pas de *naturels* non nuls, x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$. Nous devons cette conjecture au probabiliste français Pierre de Fermat (1601?-1665) qui écrivit en marge d'une traduction de l'*Arithmetica* de Diophante, dans la première moitié du 17e siècle, à côté de l'énoncé de ce problème, en Latin :

« *Cubum autem in dous cubos, aut quadratoquadratum duos quadratoquatratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* »

Ce qui se traduit par : « *J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir.* »

Cette note, faisait croire qu'une démonstration élémentaire était possible, ce qui n'était fort heureusement pas le cas. Fort heureusement car, tous les plus grands mathématiciens qui se sont attaqués à ce problème, ont tous échoué pendant 300 ans, mais parallèlement, ce problème épineux a donné lieu aux découvertes les plus audacieuses dans le domaine de la Théorie des Nombres.

Il est bon de rappeler qu'un handicap peut bien souvent devenir un atout.

Mais contrairement à ce qu'on a pu parfois voir dans la presse écrite ou dans les journaux télévisés, ce théorème n'a pas vraiment de relation avec le théorème de Pythagore. En fait, l'objet du théorème de Pythagore est de donner une caractérisation géométrique des triangles pythagoriciens, c'est-à-dire dont les longueurs des côtés forment un triplet pythagoricien, ces triplets étant eux-mêmes les solutions de l'équation de Fermat, dans le cas $n = 2$. L'analogie avec l'équation de Fermat, est donc la question de l'existence des triplets pythagoriciens, mais leur interprétation géométrique est évidemment une autre question

Une démonstration mathématique disais-je, est un exercice littéraire stylisé, rappelant plus haut une épopée, là un quatrain (poème ou strophe de quatre vers), là encore un poème lyrique. La présente démonstration part en quête de quelque chose et le trouve, sa forme est donc celle d'un roman d'amour, et son schéma, celui, séculaire, de l'absence et de la rédemption. Mais son principal message est celui de l'action à distance ; la solution de l'équation $x^n + y^n = z^n$ est ramené à la vie par le sort que lui jettent deux concepts largement séparés : la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, d'une part et la théorie d'Iwasawa de l'autre. Ce qui procure le sentiment de réconfort bienvenu qu'il existe un lien entre les concepts de la Théorie des Nombres.

J'ai été frappé de voir comment un concept scientifique pouvait rentrer dans un homme, peut-être trop difficilement ou trop violemment, inacceptable même pour lui, mais cela signifie aussi que cet homme a su l'inviter à prendre logis dans la maison de son être et d'accepter de vivre ensemble. Ce qui signifie que cet homme a pris le risque qu'un soir, ce concept frappe à la porte de sa demeure et il se peut que cet invité détruise et incendie entièrement sa maison. Il se peut aussi que par un grand coup d'aile il le dévalise ! Mais il faut me semble-t-il accepter de prendre ce concept en nous, je ne sais les mots pour décrire la richesse de cette expérience que j'ai mille fois pratiquée, à un degré plus modeste, beaucoup plus modeste que Wiles. Comme vous le verrez, Wiles dira, qu'il était assis dans son bureau, et de manière imprévisible, il a reçu comme une révélation… Autrement dit, le théorème qu'il cherchait à démontrer tout à coup l'accueillait sans s'expliquer, et il avait enfin accès à ce théorème, qui faisait désormais partie intégrante de son être. Pour ma part, lorsque je lis sa démonstration, j'apprends certaines parties par cœur, sans pour autant retourner devant mes étudiants de Master Première année en clamant que j'ai enfin compris sa démonstration, ce qui serait à la fois arrogant et prétentieux. Cependant, il est vrai que l'incompréhension s'est transformée en amour, en fertilité, en acte de confiance envers ce qui m'échappe. À mes yeux, toute bonne lecture acquitte une dette d'amour. Je parle bien sûr de cette lecture si prégnante et si présente que l'on peut avouer que l'on ne comprend pas une démonstration, un concept ou un théorème et qu'il nous faut l'apprendre par cœur. Cela ne ressortit à aucune technique mais à une métaphysique qui se fait amour, qui se fait Éros. Car ce que l'on sait par cœur est inaliénable ; on ne peut déposséder quiconque de ce qu'il porte en lui de connaissance. Lire un théorème, c'est tenter d'accumuler les renseignements sur la structuration d'un ordre qui, lui répond à un désordre l'ayant précédé. Travailler, ouvrager, pratiquer l'érudition : c'est pointer des traces, répertorier des nœuds, des liens, mettre au jour des points de flexion, des tensions, cartographier, repérer des zones et délimiter des espaces dans lesquels se disent plus et mieux les lapsus, les oublis ou les dérapages, les fausses négligences, véritables boussoles et sextants pour faire le point. Car il faut autant s'attarder sur les revers que sur les avers. Au bout du compte, trames et fils de chaînes isolés, cordes et quadrillages exacerbés, on peut proposer un réseau et des textures lisibles. Ou du moins sensibles. Lire un théorème, c'est développer sans relâche la finesse de notre perception mais aussi notre réception, en pratiquant le nomadisme, en furetant, en allant et venant. En emmagasinant un nombre incalculable d'informations pour mieux en oublier la plupart, en entassant des données et des détails, en collectionnant les abords qui paraissent sans intérêt, en évoluant dans les marges qui restent les lieux les plus proches du sens. Il s'agit de lire autour et à partir de, de circonscrire, tel un chef de guerre, fin stratège et habile tacticien afin d'identifier le germe de nouveauté, d'appropriation personnelle et de réorientation qu'un concept ou une définition peuvent recevoir lorsqu'ils sont utilisés par tel ou tel scientifique, par telle ou telle dynamique délibérée d'un texte particulier. Dans quel but ? Chercher le sens du sens. Ce faisant, il faut le tempérament et la volonté, l'esprit de conquête et la détermination, la patience et la compétence. Et, l'humilité, la capacité d'accepter qu'on puisse ne pas comprendre, d'abord, *a priori,* puis qu'on puisse défricher grandement avant de déchiffrer finement. Ces longues heures passées à s'approprier un théorème, me faisait prendre conscience que tous les concepts ne sont compréhensibles qu'avec des clés, différentes d'une époque à une autre, mais dans chaque cas nécessaires. Qu'une œuvre est un labyrinthe, plus ou moins compliqué, dans lequel on se perd sûrement si l'on n'a pas dans un dévidoir conceptuel en permanence à sa portée, la longue traînée d'un fil d'Ariane. Je ne sais comment m'expliquer autrement, cette lecture implique une responsabilité au sens moral (***responsibility***) et la capacité _ spirituelle et psychologique _ qui est la nôtre de répondre à une attente chez l'Autre (***answerability***).

J'ai le souvenir d'un grand maître qui nous demandait, lors de ma formation de prouver sans relâche d'abord notre lucidité en posant correctement le problème puis notre culture en produisant des exemples couvrant un champ assez vaste. Je me souviens de la grande salle Henri Cartan, où il était loisible d'entendre parler de *Fubini, de Lebesgue, des espaces L^p, du Lemme de Lax-Migram, du Théorème de Minty, du Théorème ergodique de Von Neumann etc.* comme vraisemblablement on entendait les rhéteurs, les dialecticiens et les sages sur le forum romain. Et mon regard sur la ville noire, plongée dans la rentrée d'hiver, zébrée seulement par les feux lumineux et rouges des automobiles qui passaient, silencieuses, au loin, derrière les carreaux qui nous protégeaient d'elles et de leurs bruits liquides sur la chaussée. Dehors, c'était le regard, l'eau parisienne ; dedans, la méditation sur l'analyse. Je me rappelle les sorties de cours, dans la nuit froide et pluvieuse, l'âme conquise par le style, le tempérament et le caractère de mon maître. J'étais heureux de trouver de la sorte à vingt ans une parole libre et de désirer sa puissance pour mes besoins, sans craindre ni risquer l'aliénation. Passeur de concepts, je m'efforce d'insérer le cheminement de l'intelligence des découvreurs comme Cauchy, Gauss, Lebesgue ou Fibonacci, dans le cheminement propre de l'élève ou de l'étudiant, de prendre celui-ci par la main pour l'aider à progresser non dans un parcours imposé, mais dans son parcours personnel, en y éprouvant du plaisir.

Le plus bel hommage que je pouvais rendre à mes formateurs était à mon tour de me donner comme devoir inévitable de préparation que, chaque fois que je touchais justement quelque chose, ce ne soit pas un voyage pour rien, je ne m'en donnais le droit et le devoir qu'à condition d'inventer. Chaque fois que je passais quelque part, j'essayais avec mes modestes moyens, de laisser une solution réellement originale. …

En ce qui concerne la démonstration du dernier théorème de Fermat, l'odyssée de Wiles commence en 1985 quand Ken Ribet, partant d'une idée de Gerhard Frey, démontre que ce théorème résulterait de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil qui affirme que toute courbe elliptique est paramétrable par une forme modulaire. Bien que moins familière que le théorème de Fermat, elle est la plus significative, car elle touche au cœur de la théorie des nombres.

Cependant, personne n'a la moindre piste de travail pour la démontrer. Travaillant dans le plus grand secret pendant huit ans, et faisant part de ses idées et progrès à Nicholas Katz, un collègue de Princeton, Wiles démontre la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil et, par conséquent, le théorème de Fermat. Comme toute démonstration de cette ampleur, elle est un tour de force riche en nouvelles idées.

Pour dévoiler sa démonstration, Wiles s'y prend de manière quasi théâtrale. Il annonce trois conférences (les 21, 22 et 23 juin 1993) sans en donner l'objet, ce qu'il ne fait que lors de la dernière en précisant que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses principaux résultats. Il agit ainsi pour s'assurer que la paternité de sa démonstration ne lui soit pas disputée après coup.

Dans les mois qui suivent, le manuscrit de sa démonstration circule auprès d'un petit nombre de mathématiciens. Plusieurs critiques sont émises contre la démonstration que Wiles a présentée en 1993, presque toutes de l'ordre du détail et résolues rapidement, sauf une, qui met en évidence une lacune. Avec l'aide de Richard Taylor, Wiles réussit à contourner le problème soulevé, en octobre 1994. Son travail met ainsi fin à une recherche qui a duré plus de 300 ans.

Il est aussi l'auteur d'autres travaux importants en théorie des nombres. Avec Coates (qui fut son directeur de thèse), il a obtenu plusieurs résultats sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et a collaboré avec Barry Mazur sur les extensions cyclotomiques.

Il est fait Chevalier commandeur de l'Ordre de l'Empire britannique (KBE) en 2000[1]