Un Émerveillement Initiatique

« O puissance d'imaginer, toi qui nous emportes parfois si loin de nous qu'on ne s'aperçoit pas que sonnent alentour mille trompettes, qui te met en mouvement ? »

DANTE

Le contenu de ce document – un jeu comme on peut le faire dans une cour de récréation – n'est pas tant de « dénoncer certaines activités de la vie quotidienne », que d'introduire dans la grisaille du quotidien l'éclaircie d'une compréhension. Nous vivons fatalement sous le régime d'une amnésie journalière, les jours se ressemblent et les objets (dont nous ne savons pas nous passer) nous manipulent autant qu'ils nous sont utiles. Or, quand on le regarde de près, l'ordinaire est stupéfiant, passionnant. Et chacun peut, au détour d'une journée, choisir de comprendre (au lieu de les subir) les choses, les institutions, les êtres et les expressions qui composent son quotidien. Il suffit de regarder attentivement ce qui semble aller de soi pour s'apercevoir qu'on a sous la main de quoi réfléchir et s'émerveiller, de quoi écouter les voix de la raison.

Mais je sais aussi que la meilleure façon de devenir soi-même, c'est de se rendre disponible aux voix venues d'ailleurs. Mon but est de faire avec mon papier-crayon l'expérience de l'étrangeté et de l'altérité. Ma lecture scientifique m'apprend constamment à quel point toute modélisation mathématique reste une aventure risquée. Rien n'est indigne de mon questionnement. Et il n'est indigne de rien. L'intérêt d'un sujet ne tient pas à sa valeur extrinsèque, objective, quantifiable, mais à la manière dont on le regarde. De même que la beauté est dans l'œil de celui qui regarde, le prix d'un phénomène ou d'un objet dépend de l'attention qu'on lui porte.

Pourquoi relever ce défi intellectuel ? Parce que, de mon point de vue, c'est le meilleur exhausteur de goût qui soit. La réflexion remplace les combats par des débats, l'ennui par l'étonnement et le jugement par la compréhension. Enfin, qu'elle rend intéressante la plus ordinaire des vies.

S'amuser dans une cour, oui ! Mais il faut savoir s'en extraire pour se situer en quelque façon *à distance de soi-même*. Mon questionnement n'est pas une distraction ni un snobisme, mais une nécessité dictée par la certitude d'être introduit par hasard dans un monde qui n'accorde pas comme moi, la même importance à la connaissance. Or, ceux qui, dans la recherche d'une oligarchie des valeurs, privilégient l'école, en sont tous là.

Il me semble que l'ignorance est une condition essentielle à la réflexion scientifique. Réfléchir, c'est accepter de ne pas savoir.

Chaîne de *naissance* et de mort

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ d'espace d'états $S = \mathbb{N}$ et de matrice de transition P définie par :

$$P(x, x-1) = q_x,\ P(x, x) = r_x,\ P(x, x+1) = p_x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_x + q_x + r_x = 1 \\ q_0 = 0 \\ q_x > 0 \text{ si } x > 0 \\ p_x > 0 \end{cases}.$$

Une telle chaîne est appelée **chaîne de naissance et (de) mort**.

Mon but est d'étudier sous quelles conditions la chaîne est récurrente.

Pour $i \in S$, je pose $\tau_i = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = i\}$. Étant donné trois états a, x et b tels que $a \leq x \leq b$, je pose $u(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b)$ et $\gamma_x = q_1 \ldots q_x / p_1 \ldots P_x$ avec $\gamma_0 = 1$. (Observons que $\tau_i \neq T_i$.)

α) _ Je déterminerai une relation entre $u(x+1) - u(x)$ et $u(x) - u(x-1)$ pour $a < x < b$. Je calculerai en fonction des γ_y pour $a \leq y < b$ la valeur de $u(a) - u(a+1)$ et j'en déduirai que $u(x) = \dfrac{\sum_{x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{a}^{b-1} \gamma_y}$ pour $a \leq x \leq b$.

Je traiterai le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.

β) _ Je déterminerai $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty)$ et je montrerai que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{0}^{+\infty} \gamma_y = +\infty$.

δ) _ Je déterminerai les mesures λ sur S, invariantes par la matrice P, et j'en déduirai que la chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{y=1}^{+\infty} \frac{p_0\, p_1 \ldots P_{x-1}}{q_1\, q_2 \ldots q_x} < \infty.$$

Application : ***« I should've quit when I was ahead. »***

Dans l'Académie de Victor Cousin, un jeune Agrégé de Maths gagne, compte tenu de son classement dans le top 15 des Agrégés de sa promotion, son profil et ses aspirations, une affectation quand il est nommé dans un établissement de son choix avec une probabilité de $\frac{2}{5}$ et perd, si l'on ne tient compte que de son barème, une affectation en étant nommé dans un établissement où il serait moins efficace avec une probabilité de $\frac{3}{5}$. Les circonstances font qu'il décide de s'arrêter (brusquement !!) lorsqu'il a gagné S affectations de son choix ou perdu 10 affectations qu'il ne souhaitait pas. Il détermine S comme la plus grande valeur telle que la probabilité de sortir gagnant soit au moins $\frac{1}{2}$. Donner la valeur de S et l'espérance de gain de ce jeune Agrégé de Maths.

Alors ? *Ah !* Personne ne le sait, peut-être parce que j'ai à nouveau succombé à cette pénible manie pédagogique qui est de poser des questions dont je suis le seul à connaître la réponse. Mais cette réponse je la connais *bel et bien* et elle vaut la peine d'être connue (*rires*…)

The answer please? *Ah*, no one knows, perhaps because again I have succumbed to that painful pedagogical vice of asking questions to which I alone know the answers; but I *do* know the answer and the answer is worth knowing.

Par ces quelques lignes, j'aimerais préciser qu'être enseigné n'est pas seulement un moyen, c'est un but, c'est une délivrance, c'est une ouverture, c'est le bonheur d'un devenir autre, c'est comme le rappelle l'étymologie du mot école, la forme suprême du loisir.

Je suggère la solution suivante

α) _ l'inégalité $a < x$ implique $x \geq 1$.

D'où

$$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \mathbb{P}_x(X_1 = x-1,\ \tau_a < \tau_b) + \mathbb{P}_x(X_1 = x,\ \tau_a < \tau_b) + \mathbb{P}_x(X_1 = x+1,\ \tau_a < \tau_b).$$

Or le premier terme de la somme est égal à

$$P(x, x-1)\ \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b \mid X_0 = x, X_1 = x-1)$$

ou encore, d'après la propriété de Markov et l'homogénéité de la chaîne à :

$$P(x, x-1)\mathbb{P}_{x-1}(\tau_a < \tau_b).$$

On a donc :

$$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) = P(x, x-1)\ \mathbb{P}_{x-1}(\tau_a < \tau_b) + P(x, x)\ \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) + P(x, x+1)\ \mathbb{P}_{x+1}(\tau_a < \tau_b).$$

Donc

$$u(x) = q_x\, u(x-1) + r_x\, u(x) + p_x\, u(x+1).$$

De cette relation et de $r_x = 1 - p_x - q_x$, on déduit que

$$u(x+1) - u(x) = \left(\frac{q_x}{p_x}\right)[u(x) - u(x-1)] = \ldots = \frac{q_x\, q_{x-1} \cdots q_{a+1}}{p_x\, p_{x-1} \cdots p_{a+1}}[u(a+1) - u(a)]$$

$$= \frac{\gamma_x}{\gamma_a}[u(a+1)-u(a)].$$

Or

$$\begin{cases} u(a) = \mathbb{P}_a(\tau_a < \tau_b) = 1 \\ u(b) = \mathbb{P}_b(\tau_a < \tau_b) = 0 \end{cases}.$$

D'où

$$\sum_{x=a}^{b-1} [u(x+1)-u(x)] = -1 = [u(a+1)-u(a)] \sum_{x=a}^{b-1} \frac{\gamma_x}{\gamma_a}$$

Il vient

$$u(a)-u(a+1) = \frac{\gamma_a}{\sum_{a}^{b-1} \gamma_y}$$

et donc

$$u(x)-u(x+1) = \frac{\gamma_x}{\sum_{a}^{b-1} \gamma_y}.$$

D'où :

$$u(x) = \sum_{x}^{b-1} [u(y)-u(y+1)] = \frac{\sum_{x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{a}^{b-1} \gamma_y}$$

Dans le cas où $p_x = q_x$ (marche symétrique), on obtient : $\begin{cases} \gamma_x = 1 \\ u(x) = \dfrac{(b-x)}{(b-a)} \end{cases}.$

β) _ Les conditions $p_x > 0$ pour tout x et $q_x > 0$ pour tout $x \geq 1$ impliquent que tous les états communiquent et la chaîne est donc irréductible. Si l'état initial est $X_0 = 1$, on a pour tout $x \neq 1$, $\tau_x \geq 1$ donc $\tau_x = T_x$. Le résultat précédent implique :

$$\forall n > 1,\ IP_1\,(T_0 < T_n) = \frac{\sum_1^{n-1} \gamma_y}{\sum_0^{n-1} \gamma_y} = 1 - \frac{1}{\sum_0^{n-1} \gamma_y} \quad \text{puisque} \quad \gamma_0 = 1.$$

Si $X_0 = 1$, on a $T_2 < \ldots < T_n < T_{n+1} < \ldots$, et la chaîne ne peut atteindre l'état $n + 1$ qu'après l'instant $n - 1$. D'où pour tout $n > 1$, $T_n \geq n - 1$ et $(T_0 \geq T_{n+1}) \subset (T_0 \geq T_n)$.

D'où $(T_0 = +\infty) = \lim_{n \to} (T_0 \geq T_n)$ (en décroissant) $= \bigcap_n (T_0 \geq T_n)$.

L'égalité $IP_1\,(T_0 \geq T_n) = \dfrac{1}{\sum_0^{n-1} \gamma_y}$ implique donc $IP_1\,(T_0 = +\infty) = \dfrac{1}{\sum_0^{+\infty} \gamma_y}$.

La chaîne étant irréductible est récurrente ou transitoire.

Si elle est récurrente, $IP_1\,(T_0 = \infty) = 0$ et donc $\sum_0^{+\infty} \gamma_y = \infty$.

Réciproquement, si $\sum_0^{+\infty} \gamma_y = \infty$, alors $IP_1(T_0 < \infty) = 1$.

Or,

$$IP_0\,(T_0 < \infty) = P(0, 0) + P(0, 1)IP_1(T_0 < \infty) = P(0, 0) + P(0, 1) = 1.$$

L'état $\{0\}$ est donc récurrent. La chaîne étant irréductible, tout état est récurrent.

δ) _ Soit λ une mesure invariable par P. On a donc, pour tout y de S :

$$\sum_x \lambda(x)P(x, y) = \lambda(y).$$

D'où

$$\lambda(0)r_0 + \lambda(1)q_1 = \lambda(0) \text{ et } \lambda(y-1)p_{y-1} + \lambda(y)r_y + \lambda(y+1)q_{y+1} = \lambda(y), \quad \forall y \geq 1.$$

On en tire simplement

$$\lambda(1) = \left(\frac{p_0}{q_1}\right)\lambda(0)$$

et

$$q_{y+1}\,\lambda(y+1) - p_y\,\lambda(y) = q_y\,\lambda(y) - q_{y-1}\,\lambda(y-1) = \ldots = q_1\,\lambda(1) - P_0\,\lambda(0) = 0.$$

D'où

$$\lambda(y+1) = \frac{p_y}{q_{y+1}}\lambda(y) = \ldots = \frac{p_0\,p_1 \cdots p_y}{q_1\,q_2 \cdots q_{y+1}}\,\lambda(0).$$

Cela détermine donc, au facteur $\lambda(0)$ près, la seule mesure λ invariante. La chaîne, étant irréductible, est donc récurrente positive si et seulement si $0 < \lambda(\mathbb{N}) < \infty$; donc si et seulement si :

$$\Lambda = \sum_{y \geq 1}^{\cdot} \frac{p_0\, p_1 \ldots\, P_{y-1}}{q_1\, q_2 \ldots\, q_y} < \infty,$$

ou, ce qui revient au même :

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{p_y\, \gamma_y} < \infty.$$

On a donc le classement suivant pour une chaîne irréductible de naissance et de mort :

$$* \sum_{y}^{\cdot} \gamma_y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{chaîne transitoire}$$

$$* \sum_{y}^{\cdot} \gamma_y = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{p_y\, \gamma_y} = +\infty \quad \Leftrightarrow \text{chaîne récurrente nulle}$$

$$* \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{p_y\, \gamma_y} < \infty \quad \Leftrightarrow \text{chaîne récurrente positive.}$$

Application de l'exercice précédent

Utilisons les notations de l'exercice que je viens de démontrer et considérons que le jeune Agrégé de Maths possède 10 vœux en entrant dans l'Académie de Victor Cousin. Il donne sa démission lorsqu'il a soit 0 soit $b = 10 + S$ affections. On cherche donc la plus grande valeur $b > 10$ telle que $u_b(10) = \mathrm{IP}_{10}\,(\tau_0 < \tau_b) < \frac{1}{2}$.

Or

$$\gamma_x = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\left(\frac{2}{5}\right)^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

et on a vu que

$$u_b(10) = \frac{\sum_{10}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{0}^{b-1} \gamma_y} = \frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^b - \left(\frac{3}{2}\right)^{10}\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^b - 1\right]}.$$

Pour $b > 0$, la fonction définie par $g(b) = u_b(10)$ est croissante et continue.

On a :

$$g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\mathrm{Log}\left[2\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\mathrm{Log}\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

D'où

$$x \approx 11,7\,;\ b = [x] = 11 \ \text{ et } \ u_b(10) = 0,337.$$

Le jeune Agrégé de Maths devra donner sa démission dès qu'il aura gagné $S = b - 10 = 1$ affection de son choix. (Trouvez-vous cela normal ?!) ….

Son espérance de gain est alors $E = S(1 - u_b(10)) - 10 \times u_b(10)) = -2,71.$

Moralité, l'obsession du barème dans l'affection des enseignants, nous fait faire fausse route en effet. Elle relève du "productivisme scolaire", réduit la transmission à une transaction et oublie que tout apprentissage est une histoire...

Par ailleurs, la mission de l'école ne doit pas se réduire à l'acquisition d'une somme de compétences, aussi nécessaires soient-elles, mais elle relève de l'accès à la pensée.

Et c'est par la médiation de l'œuvre artistique, scientifique ou technologique que la pensée se structure et découvre une jouissance qui n'est pas de domination, mais de partage.

Estimation de la durée de vie (moyenne) d'un enseignant heurté au mur de l'*absence absolue d'intérêt*.

Il s'agit naturellement des enseignants qui ont perdu la flamme, qui ne ressentent plus charnellement la saveur physique d'une pensée, le goût d'une idée qui s'infiltre dans leur peau pour gagner d'un coup d'aile magique leurs mains, leurs bras et leur visage. Ceux qui, compte tenu des circonstances, ne peuvent plus dire au naturel ce qu'ils disent, ne peuvent plus se livrer à leurs élèves, d'être dans le point de mire de leur attention et de leur écoute, bref des profs brisés (Non, de grâce, ne riez pas, c'est sérieux…)

Une étude récente, faite par un Institut de Recherche Californien, évalue que la durée de vie d'enseignants déprimés, a une distribution exponentielle d'espérance inconnue $\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Pour estimer α, on choisit un échantillon de n enseignants et on observe les instants où les r premiers enseignants ne rayonnent plus : $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(r)}$, où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ représentent les durées de vie des n enseignant.

Un « estimateur sans biais » (*e.s.b.*) de $\frac{1}{\alpha}$ est une *v.a.* $U = h(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(r)})$ telle que $EU = \frac{1}{\alpha}$.

Trouver le « meilleur » *e.s.b.* de la forme $U = \lambda_1 X_{(1)} + \lambda_2 X_{(2)} + \ldots + \lambda_r X_{(r)}$, c'est-à-dire combinaison linéaire des observations $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(r)}$. Autrement dit :

Montrer que $\hat{U} = (X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots + X_{(r)})\frac{1}{r} + X_{(r)}\frac{n-r}{r}$ et qu'alors $\operatorname{var} \hat{U} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\alpha^2}$.

Ma solution

Les *v.a.* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de densité $\alpha\, e^{-\alpha x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

On démontre aisément que les *v.a.* $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ sont indépendantes et de plus $X_{(k)} - X_{(k-1)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha(n-k+1)$ pour $k = 1, \ldots, n$ (on pose $X_{(0)} = 0$).

Or, on peut écrire

$$U = \lambda_1 X_{(1)} + \ldots + \lambda_k (X_{(1)} + X_{(2)} - X_{(1)} + \ldots + X_{(k)} - X_{(k-1)}) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_r (X_{(1)} + X_{(2)} - X_{(1)} + \ldots + X_{(r)} - X_{(r-1)})$$

D'où

$$U = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \right) (X_{(k)} - X_{(k-1)}).$$

U est alors la somme de r *v.a.* indépendantes.

Par suite : $$v.a.r.\ U = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \right)^2 v.a.r.\ (X_{(k)} - X_{(k-1)}).$$

On a aussi, par linéarité

$$EU = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \right) E(X_{(k)} - X_{(k-1)}).$$

Or

$E(X_{(k)} - X_{(k-1)}) = \dfrac{1}{\alpha(n-k+1)}$ (espérance d'une loi exponentielle : inverse du paramètre). La variance $V(\beta)$ d'une loi exponentielle de paramètre β est :

$$V(\beta) = \int_0^{+\infty} \beta x^2 e^{-\beta x}\, dx - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2,$$

soit, en intégrant par parties,

$$V(\beta) = \frac{1}{\beta^2}.$$

D'où

$$v.a.r\ (X_{(k)} - X_{(k-1)}) = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{(n+1-k)^2}.$$

Ainsi

$$\text{v.a.r. } U = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \Big)^2 \frac{1}{(n+1-k)^2} \quad \text{et} \quad EU = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \Big) \frac{1}{n-k+1}$$

Le problème posé est de déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de façon que *v.a.r.* U soit minimum avec $EU = \dfrac{1}{\alpha}$.

Posons $\nu_k = \dfrac{1}{n-k+1} \displaystyle\sum_{j=k}^{r} \lambda_j$ pour $k = 1, \ldots, r$. Le problème consiste donc à déterminer

$\nu_1, \ldots, \nu_r$ de façon que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k^2$ minimum.

Soit M le point de coordonnées $\nu_1, \ldots, \nu_r$ dans $\mathbb{R}^r$. Alors $OM^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k^2$ est minimum si et seulement si $M = \overline{M}$ est la projection orthogonale de O sur l'hyperplan affine d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k = 1$.

Comme le vecteur (1, 1, …, 1) est orthogonal à cet hyperplan, les coordonnées $\overline{\nu_k}$ de $\overline{M}$ sont $\overline{\nu_1} = \overline{\nu_2} = \ldots. = \overline{\nu_r} = \dfrac{1}{r}$; ce qui donne :

$$OM^2 = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \overline{\lambda_r} = \frac{n-r+1}{r}, \quad \overline{\lambda_{r-1}} = \ldots = \overline{\lambda_1} = \frac{1}{r}.$$

Ainsi

$$\hat{U} = \overline{\lambda_1}\, X_{(1)} + \ldots\ \overline{\lambda_r}\, X_{(r)} = \frac{1}{r}\left(X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots + X_{(r)}\right) + X_{(r)}\ \frac{n-r}{r}$$

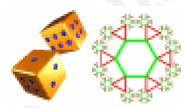
est l'unique solution du problème et *v.a.r.* $U = \frac{1}{r\,\alpha^2}$.

Quod erat demonstrandum*, as Latinists like to say*.

Mon commentaire

On doit savoir où l'on est et être heureux d'avoir une place, même si elle est petite : quelle joie que de pouvoir mettre dans les boîtes aux lettres de bons messages et d'être sûr qu'ils iront à leurs destinataires !

Prenant un tant soit peu la place de l'élève/l'étudiant, je demanderais à la science d'élargir ma palette. Sans la médiation des bons cours, ce livre en miniature, je ne crois pas que je serais capable de voir le monde. En effet, l'expérience du sensible n'est pas une expérience immédiate. La routine, l'ennui, le morne accablement tiennent aussi au fait que nous manquons de mots et de concepts pour discerner les choses. Les nuances de la vie ne nous sont pas données par la vie mais par l'art, la littérature et par la science….



Le *pari* d'un enseignement *élitaire* pour tous sans être *élitiste*

Un jeune lauréat au concours d'Agrégation devrait faire le choix d'une pratique plus ou moins audacieuse, pour sa titularisation parmi les stages suivis chez trois professeurs confirmés aux méthodes différentes.

Le premier Professeur (P_1) lui montre sur un sujet de probabilité, comment entraîner la réflexion dans une impasse afin d'aboutir à un paradoxe, ce qui selon ce dernier est un excellent moyen de faire comprendre la nature d'un phénomène.

Le deuxième Professeur (P_2) soucieux de travailler avec le plus grand nombre, lui propose une pratique des Mathématiques qui visent moins à se satisfaire de ce qui fait sens, qu'à fournir l'occasion de se pâmer devant le calcul en choisissant de faire plancher ses élèves sur quelques exercices ritualisés.

Le troisième Professeur enfin (P_3) lui suggère une séance d'*Analyse* où il est question d'échafauder des modèles explicatifs, d'imaginer des concepts, de leur adjoindre des paramètres décrivant le réel, et de représenter les liens entre ces paramètres au moyen d'équations.

À l'instant $t = 0$, le jeune Agrégé accepte de se rendre dans l'établissement, du professeur (P_1) pour étudier de près sa pratique. Puis il se déplace de façon aléatoire sur les autres établissements selon la règle suivante :

S'il est séduit par la pratique du professeur P_1 ou celle du professeur P_2 au temps $t = k$, il étudie la pratique de l'un des deux autres professeurs avec équiprobabilité.

S'il étudie la pratique du professeur P_3 au temps $t = k$, il choisit de l'appliquer dans ses classes. (On dit que la pratique du Professeur P_3 est absorbante).

En théorie d'éducation, une alternative ne sollicite pas nécessairement les réponses oui ou non, il existe d'autres réponses.

Notons E_n, F_n et G_n les évènements respectifs : « le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_1 au temps $t = n$ », « le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_2 au temps $t = n$ », et « le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_3 au temps $t = n$ ».

Puis on pose :

$$u_n = P(E_n),\ v_n = P(F_n) \text{ et } w_n = P(G_n),\ n \geq 0.$$

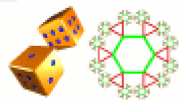
α) _ En utilisant la formule des probabilités totales, établir des relations de récurrence entre u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} et u_n, v_n, w_n.

β) _ Calculer w_n en fonction de n, puis trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n)$. **Commenter.**

Bien que plongé dans la grisaille quotidienne de la routine, souhaitons lui de parvenir à tirer de grandes satisfactions de l'objet de son étude.

Comme il convient à tout narrateur, j'ai pris des libertés et me suis autorisé des licences. Certes pas sur les idées, toutes bien réelles, ou sur les protagonistes, tous historiquement attestés, mais sur les temps et les lieux, parfois recomposés spécialement pour permettre une meilleure compréhension. Je peux en tout cas garantir que même ce qui n'est pas vrai est toujours vraisemblable.

Je garderai, un bien joli souvenir de cette période. Je ne suis pas vraiment certain que mon récit soit de nature à éclairer quiconque _ ni, à plus forte raison, à « cerner » quelque mystère. L'enseignement est un noviciat, n'est-ce-pas … Un noviciat perpétuel … Et il est clair qu'il n'y a guère en ces matières de « leçons » à recevoir ni donner. Mais j'aime devant mes étudiants, faire comme si…



Ma solution

α) _ Appliquons comme le suggère l'énoncé, la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements E_n, F_n et G_n.

$$P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} | E_n) \times P(E_n) + P(E_{n+1} | F_n) \times P(F_n) + P(E_{n+1} | G_n) \times P(G_n). \quad \textbf{(*)}$$

Soit :

$$u_{n+1} = 0 \times u_n + \frac{1}{2} v_n + 0 \times w_n.$$

Donc,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n. \quad \textbf{(1)}$$

Un mot de commentaire sur les probabilités conditionnelles du second membre de l'équation **(*)**:

Primo *:* $P(E_{n+1} | E_n) = 0$, car le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_1 à l'instant $t = n$ mais, doit changer de tuteur.

Secundo *:* $P(E_{n+1} | F_n) = \frac{1}{2}$, car le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_2 à l'instant $t = n$ passe au tuteur P_1 à l'instant suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Tercio *:* $P(E_{n+1} | G_n) = 0$, car le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths séduit par la pratique du professeur P_3 à l'instant $t = n$ applique cette pratique dans ces classes aux instants suivants.

D'une manière analogue, on trouve :

$$P(F_{n+1}) = P(F_{n+1} | E_n) \times P(E_n) + P(F_{n+1} | F_n) \times P(F_n) + P(F_{n+1} | G_n) \times P(G_n).$$

Soit :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 0 \times v_n + 0 \times w_n.$$

D'où,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n. \quad \textbf{(2)}$$

$$P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} | E_n) \times P(E_n) + P(G_{n+1} | F_n) \times P(F_n) + P(G_{n+1} | G_n) \times P(G_n).$$

Soit :

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} v_n + 1 \times w_n.$$

D'où

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} v_n + w_n. \quad \textbf{(3)}$$

β) _ de la relation **(3)**, on déduit :

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} + w_n.$$

En combinant les relations **(1)** et **(2)**, on déduit :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

La suite $((u_n + v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Il en résulte que :

$$u_n + v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (u_0 + v_0) = \frac{1}{2^n} .$$

Remarque : $(u_0 + v_0 = P(E_0) + P(F_0) = 1 + 0$, car le jeune lauréat au concours d'agrégation de Maths choisirait la pratique du professeur P_1 au temps $t = 0)$.

D'où

$$w_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + w_n.$$

Par itération, il vient :

$$w_n = \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2}\right) + w_0 .$$

Soit :

$$w_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

On obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = 1.$$

Pour interpréter ce résultat, je désigne par A, l'évènement « le jeune lauréat au concours d'agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_3 ».

Il est clair que A = $\bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n$ (le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_3 si et seulement si l'on constate qu'il s'y trouve dans la classe de ce professeur à un instant $t = n$, $n \geq 0$).

De plus, $G_n \subset G_{n+1}$. En effet, si le jeune lauréat au concours d'Agrégation de Maths est séduit par la pratique du professeur P_3 à l'instant $t = n$, il l'applique à l'instant suivant $t = n + 1$.

D'après les propriétés de la probabilité P, on obtient :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} G_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P(G_n) = \lim_{n \to +\infty} w_n = 1.$$

L'évènement A est quasi-certain. Le jeune lauréat au concours d'Agrégation est séduit par la pratique du professeur P_3 de façon quasi-certaine.

Je pense que vous êtes sensibles à la simplicité de cette condition surtout si on la compare à la fausse conception, étriquée et niveleuse, (vers le bas !) de la démocratie. De plus, ce jeune lauréat préserve toutes ses chances, car il a compris que ce qui permet la pâmoison n'exclut *pas la signification, de la même manière ce qui induit du sens n'empêche pas la jubilation. Là encore, la complémentarité s'impose contre le tiers exclu ! C'est fabuleux.*

Qui oserait soutenir que les Maths c'est compliqué, que la science n'est pas une discipline de remise en cause permanente, qu'elle n'aide pas à l'émerveillement, qu'elle n'est pas une belle école de la lucidité ? Pour faire de la bonne science, il est indispensable de jouer, avec rigueur, avec les possibilités et les hypothèses.

Des matières comme les Mathématiques, la physique et la philosophie, bien enseignées, constituent un bon entraînement à cet exercice fondamental.

Dans bien des cas, il n'est possible de garder les pieds sur terre que lorsqu'on sait manier les conjectures et que l'on se sert bien de son imagination contrainte.

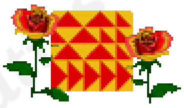
Anecdote

J'ai découvert en relisant **Hannah Arendt**, l'expression biblique : un cœur intelligent. Le roi Salomon, rappelle **Arendt**, adjure l'Eternel de lui accorder un «cœur intelligent», c'est-à-dire un cœur sagace et perspicace.

Dieu garde le silence, mais, pour nous doter peut-être (il faut rester modeste) d'un cœur intelligent, nous avons l'*Analyse Mathématique*. En elle, l'affect et le concept sont perpétuellement enchevêtrés. Comme la philosophie, l'*Analyse Mathématique* nous parle de ce que l'Homme est capable de réaliser par son imagination, mais c'est aux hommes qu'elle a affaire et non à l'Homme directement. Elle éclaire l'Histoire, la vie, le monde, sans jamais sacrifier les individus sur l'autel de la connaissance.

L'art par exemple, n'aurait aucun intérêt s'il se réduisait à sa fonction expressive. La Mathématique n'aurait aucun intérêt si elle se réduisait à des règles d'arithmétique. Sa grandeur et sa nécessité, c'est, de ressaisir, de nous faire connaître cette réalité loin de laquelle nous vivons, de laquelle nous nous écartons de plus en plus au fur et à mesure que prend plus d'épaisseur et d'imperméabilité la connaissance conventionnelle que nous lui substituons.

Probabilité d'une rencontre – *Loves Me, Loves Me Not*



Jessica et Grégory se sont rencontrés virtuellement sur un site de rencontre d'Internet et projettent un rendez-vous entre 17h et 18h pour convenir des modalités de leur idylle. Chacun d'eux a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes. On suppose qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués entre 17h et 18h.

α) _ Probabilité d'une rencontre.

β) _ Jessica fixe son heure d'arrivée à x. Quelle probabilité a-t-elle de rencontrer Grégory ?

γ) _ Arrivant à l'heure x, Jessica ne trouve personne. Quelle probabilité a-t-elle de rencontrer Grégory ?

Ma solution

α) _ On peut représenter l'ensemble des résultats possibles de l'expérience par l'ensemble des couples (x, y) où x est l'heure d'arrivée de Jessica (J) et y l'heure d'arrivée de Grégory (G), soit l'ensemble $[17, 18]^2$; une simplification évidente est de choisir plutôt $\Omega = [0, 1]^2$. La tribu A est $B([0, 1]^2)$. Puisque les arrivées sont indépendantes, la probabilité P sur Ω est $P = P_J ® P_G$ où $P_J = P_G$ est la probabilité uniforme sur [0, 1]. Par suite, P est la probabilité uniforme sur $[0, 1]^2$, c'est-à-dire la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^2$.

L'événement A = « Jessica et Grégory se rencontrent » s'écrit, puisque

$$10 \text{ mn} = \frac{1}{6} \text{ heure}, \ A = \{(x, y) \in \Omega \, / \, |x - y| \leq \frac{1}{6}\}.$$

On a $P(A) = \int_A dxdy$; ce qui donne

$$P(A) = \int_{\frac{1}{6}}^{1-\frac{1}{6}} \left(\int_{x-\frac{1}{6}}^{x+\frac{1}{6}} dy \right) dx + 2 \int_0^{1/6} \left(\int_0^{x+\frac{1}{6}} dy \right) dx = \frac{11}{36}.$$

β) _ L'heure d'arrivée de Jessica n'est plus aléatoire. Par suite, l'espace des épreuves n'est pas le même que dans α). Je le noterai cependant encore (Ω, A, P).

On a Ω = [0, 1] (heure d'arrivée de Crégory) A = B([0, 1]), et $P = P_G$ = mesure de Lebesgue sur [0, 1]. L'événement A_x = « Jessica et Grégory se rencontrent » s'écrit :

$$A_x = \{y \in [0, 1] / |y - x| \leq \frac{1}{6}\}.$$

Par suite (voir *fig.*),

$$\text{si } 0 \le x \le \frac{1}{6}, \quad A_x = \left[0, x + \frac{1}{6}\right] \text{ et } P(A_x) = x + \frac{1}{6};$$

$$\text{si } \frac{1}{6} < x < 1 - \frac{1}{6}, \quad A_x = \left[x - \frac{1}{6},\ x + \frac{1}{6}\right] \text{ et } P(A_x) = \frac{1}{3};$$

$$\text{si } 1 - \frac{1}{6} \le x \le 1, \quad A_x = \left[x - \frac{1}{6}, 1\right] \text{ et } P(A_x) = \frac{7}{6} - x.$$

γ) _ l'espace des épreuves est le même qu'en β) . Soit B_x = « Grégory n'est pas là à l'heure x ». On a encore : $A_x = \{y \in [0, 1] / |y - x| \le \frac{1}{6}\}$.

On doit ici calculer $P(A_x | B_x)$.

$$\text{si } 0 \le x \le \frac{1}{6}, \quad]x, 1] \text{ et } P(A_x | B_x) = \frac{P(A_x \cap B_x)}{P(B_x)} = \frac{P(]x, x + \frac{1}{6}])}{P(]x, 1])} = \frac{1}{6(1-x)}.$$

$$\text{si } \frac{1}{6} < x < 1 - \frac{1}{6}, \quad B_x =]x, 1] \cup [0, x - \frac{1}{6}[.$$

Alors :

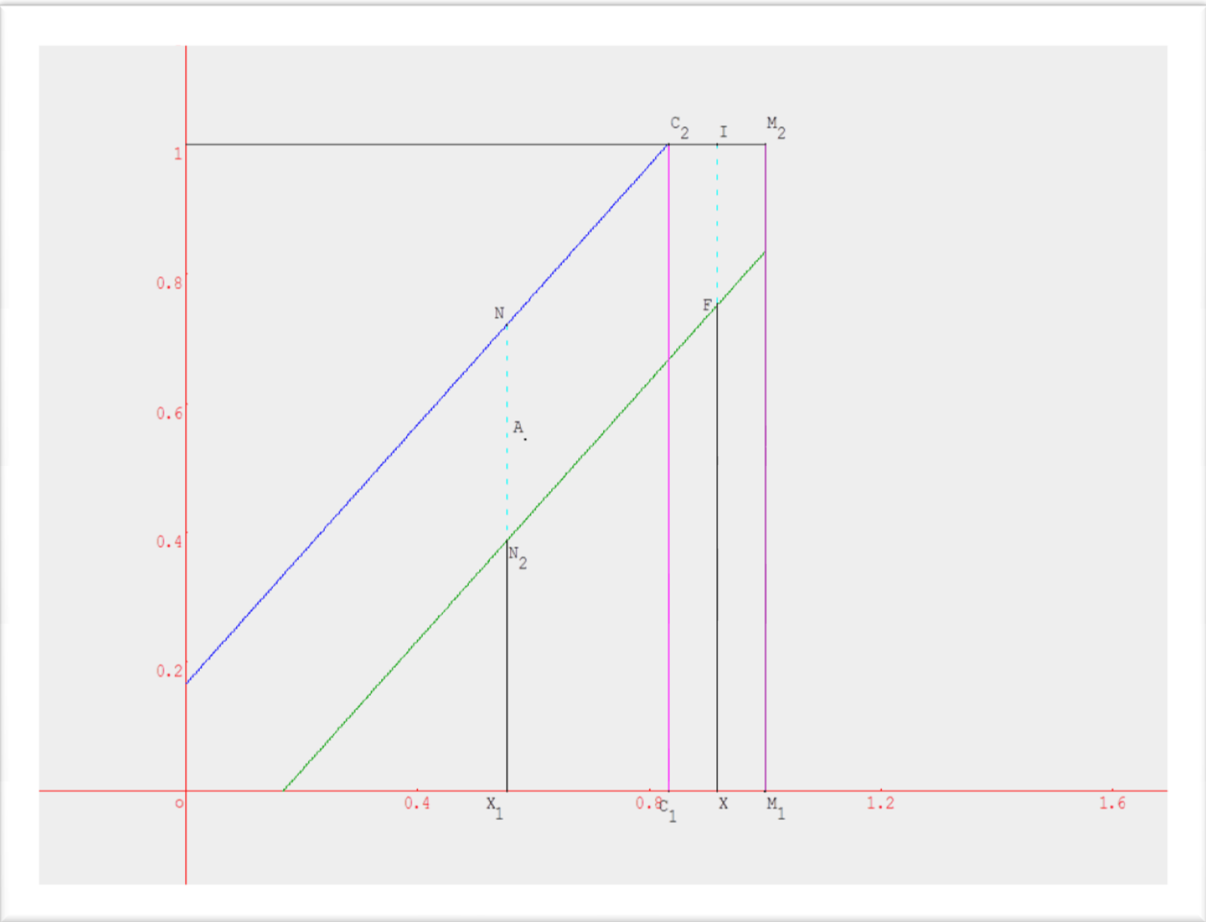
$$P(A_x | B_x) = P([x, x + \frac{1}{6}[) / P(]x, 1] + P([0, x - \frac{1}{6}[) = \frac{1}{5}.$$

Enfin,

$$\text{si } 1 - \frac{1}{6} \le x \le 1, \quad B_x =]x, 1] \cup [0, x - \frac{1}{6}[$$

et

$$P(A_x | B_x) = P(]x, 1]) / P(]x, 1] + P([0, x - \frac{1}{6}[) = 6\,\frac{1 - x}{5}.$$



[Théo Héikay-Universitaire/pdf]