Toute relecture d'une Théorie Mathématique est une découverte, comme la première lecture.

Chaque jour, je lis les nouveautés dans le domaine de l'*Analyse Mathématique*. Chaque jour, j'écoute comme si c'était la première fois, ses musiques. Ce fut le cas d'"Une vision singulière des séries entières''. Elle frappa si joyeusement à la porte de mon être. Une théorie scientifique qui reste à connaître me semble être un des plus grands dons que la science puisse nous offrir en chuchotant à notre oreille : « Je te donne un nouveau cosmos, un nouveau monde. Ouvre tes mains, essaie d'y entrer. »

Rien n'est plus effrayant que de commencer à émettre des préjugés parce que l'oreille intérieure se durcit. Pour longtemps, je lutterai contre cette crainte d'être sceptique devant les fruits de la pensée qui naîtront demain matin et qu'il faudra cueillir avec enthousiasme. Il faut être capable d'entendre la grammaire faite musique, qui est à notre portée immédiate. Et, accueillir authentiquement dans son petit grenier de sentiment et de compréhension les échanges entre la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale d'une série entière, construite dans le cercle unité.

Ce qui est en jeu ici, c'est l'audace grammaticale que l'on trouve dans sa construction. C'est précisément dans notre expérience de la poésie au sens de la création, du langage conceptuel dans sa forme la plus expressive, c'est-à-dire dans la démonstration, qu'un accueil naturel à la grammaire porte le plus de fruits, et que l'incapacité de lui réserver un tel accueil cause le plus de dommages.

En lisant le texte à haute voix, je suis arrivé à le rendre très expressif. Le fait que la musique soit au cœur du texte dans son rythme, et sa modulation, m'est devenu bouleversant d'évidence. Chaque concept, chaque formule, chaque idée était pour moi, intelligible. Ma compréhension du texte, constituait d'emblée une large partie de mon travail. Dès lors, j'ai cherché à émouvoir par les concepts que j'interprétais. Mon seul but était de favoriser un certain foisonnement de l'imaginaire, de jouer avec les idées, méditer les concepts, en créer de nouveaux, saisir leur portée, expliciter leur sens.

Le but de l'instruction, dit **Michel Serres**, est la fin de l'instruction, c'est-à-dire l'invention. Selon lui, l'invention est le seul acte intellectuel vrai, la seule action d'intelligence. Le reste ? Copie, tricherie, reproduction, paresse, convention, bataille, sommeil. L'honnêteté, au contraire, consiste à n'écrire que ce l'on pense et ce que l'on croit avoir inventé. Seule éveille la découverte. L'invention seule prouve qu'on pense vraiment la chose qu'on pense, qu'elle que soit la chose. Je pense donc j'invente, j'invente donc je pense : seule preuve qu'un enseignant travaille ou qu'un universitaire écrit. Mes articles ne sont que de moi. Mon verre n'est pas grand, mais je bois dans mon verre. ÉCRIRE est, du moins pour moi, une joie constante. Je m'accroche à l'espoir que lire, l'est tout autant, pour le lecteur. Cela dit, je n'aurai jamais ce toucher somnambule du scientifique enraciné dans la pure création.

*Dans les humanités ou les sciences, proclamait **George Steiner**, le penseur qui compte serait celui qui perçoit et exploite une intuition ou un concept décisif, qui établit une découverte ou une relation cruciale.*

The significant thinker in the humanities or the sciences would be one who perceives and exploits a decisive insight or concept, who fixes on one crucial discovery or connection. Steiner declared.

Prendre, ***apprendre***, **comprendre**, ***surprendre*...** Le temps est suspendu, une grande sérénité est en cours. Les séries entières, instruments de prédilection de la théorie des fonctions analytiques, ont été envoyées en délégation en ce monde pour évaluer et pacifier les passions. Elles nous parviennent enchantées, aigües, graves, rondes, mélodieuses, rauques, coulées et profondes. Elles animent la nature et les corps à égalité. On les contemple, on se promène dans les méandres de leur subtilité, on soliloque, on imagine, on médite en silence. La gorge, le souffle, les doigts, la feuille blanche devenue voix, portent ses empreintes. Elles charment tout, les séries entières enchantées, bien mieux que les fonctions méromorphes. Les transformations d'Abel sifflent à l'intérieur des têtes, tout l'orchestre des apparences, mais aussi les formulations séquentielles, les intégrales riemanniennes, les inégalités, les majorations, les liens qui produisent de la substances, une sorte de confluent, une forme où des flux et des fluctuations entrent, dansent et se croisent, font ensemble somme et différence, produit et bifurcation, traversent les échelles des dimensions. *Dans ma boîte noire à pudeur, je sais cette douleur, et ce courage de l'errance, pour payer la nouveauté.* Tout revient en fin de compte au substantif, même le relationnel.

Les séries entières résistent à tout, aidées de la deuxième formule de la moyenne, de la convergence uniforme sur le cercle unité, de quelques majorations, elles surmontent la terre et l'air, le feu et l'eau, les courants, les vents, les rivières. Je les suis comme on emprunte une direction. Une viscosité prend. Elle comprend. Elle fait comprendre. Elle apprend.

Cet article, faut-il le préciser, a été conçu comme un peintre pense un tableau, un musicien un concerto. Je vois très bien telle couleur à tel emplacement, telle note à tel moment. On navigue ainsi, à vue et à l'ouïe, entre définitions, théorèmes, lemmes, corollaires, propriétés et concepts. Au-dessus de ces variations, les séries entières flottent comme l'esprit sur les ondes.

Somethin'else : Une vision singulière des séries entières

Les grandes théories logiques s'échafaudent en plantant le décor

Partant d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence 1, et si l'on situe au niveau des classes préparatoires scientifiques, le programme exige d'aborder les relations existant entre les trois propriétés (1), (2), (3) suivantes :

$$\begin{cases} (1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \\ (2) \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \\ (3) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur le cercle unité} \end{cases}$$

On trouve souvent dans tout bon livre de taupe digne de ce nom, la validité des implications ci-dessous :

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow (2) \\ (1) \Rightarrow (3) \\ (3) \Rightarrow (2) \end{cases} \text{. Restent les trois implications de ce schéma-ci : } \begin{cases} (2) \Rightarrow (1) \\ (2) \Rightarrow (3) \\ (3) \Rightarrow (1) \end{cases} .$$

Δ !! _ Je me bornerai, dans cet exposé, à trouver un sens à ces implications, essayer de dégager quelque chose d'intelligible de leur magie technique, de ce qui rend la cadence du sens énigmatiquement lumineuse.

On subodore qu'elles sont toutes les trois fausses. Je vais essayer d'établir l'invalidité des implications : $\begin{cases} (2) \Rightarrow (3) \\ (3) \Rightarrow (1) \end{cases}$ en m'appuyant sur le classique *Trigonométric Séries*, de Zygmund. L'invalidé de l'implication (2) $\Rightarrow$ (1), étant déjà connue dans une proposition du § 4 d'un article paru dans la Revue de Mathématiques Spéciales sous le titre « *Domaine de convergence d'une série entière* » (RMS 9 mai 2006).

« *Poetry makes nothing happen* » Nathaniel Hawthorne

Je crois à la vertu des dialogues. Il y a une très belle habitude pédagogique : pour faire passer l'amère pilule d'un raisonnement ardu, beaucoup d'auteurs de l'Antiquité à nos jours en passant par **Galilée**, ont eu recours à l'anecdote, car c'est en racontant des histoires que l'on essaie de comprendre. Lorsque Nathaniel Hawthorne écrit : « *La poésie ne fait rien advenir* », je me dis plusieurs choses : d'abord qu'il ne faut pas détester une certaine solitude, un certain silence, une certaine obsession de l'âme. Deuxièmement, que les trois activités absolument inutiles: la pensée pure, la musique, la poésie, peuvent sauver l'homme. Même dans l'impossible. Troisièmement, qu'une traduction d'un concept, même avec l'imperfection humaine, traduit ce qu'elle traduit, ce qui est une façon de dire que langage conceptuel et réalité ont un rapport. Et quatrièmement, je me dis qu'il faut être joyeux. Tout le monde peut aimer une fugue de **Bach** même sans savoir l'analyser. Il existe plusieurs niveaux d'extase et chacun doit trouver le sien. Mais tout le monde n'a pas besoin de participer à des séminaires sur **Descartes**…

I _ Vous, qui irez dorénavant promener sur les routes l'ennui vague de vos désirs, ne cherchez plus de but désormais à vos interminables errances, car ces QUELQUES PROPRIÉTÉS vous serviront de guide.

J'utiliserai des propriétés suffisamment connues pour éviter de surcharger mon article de leurs démonstrations.

Pour les propositions 1 et 2, qui concernent la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$, on peut les trouver détaillées dans la première épreuve de l'*X* (*École polytechnique*_ option MP*, 2006).

Proposition 1 . _ $\exists A_1\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq A_1.$

L'idée de base est simple et élégante, inventive et ingénieuse. Le mathématicien se propose de *définir* l'addition infinie en se servant des suites de leurs limites. Un exercice palpitant qui n'est pas sans évoquer un numéro d'équilibriste exécuté sans filet. _ The essential idea is simple and elegant, inventive and ingenious. Infinite addition the mathematician proposes to *define* in terms of sequences and their limits. The drama that results has some of the thrill of a high-wire act performed without a net.

Proposition 2. _ Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On a l'égalité

$$\int_a^b f(t)\left(\mathrm{E}(t) + \frac{1}{2} - t\right)dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b \frac{1}{k} f(f) \sin 2\pi kt\, dt,$$ ici E désigne la partie entière).

Je rappelle en outre un énoncé du **deuxième théorème de la moyenne**.

Proposition 3. _ Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et à valeurs réelles, si de plus g est monotone sur $[a, b]$,

$$\exists\, c \text{ dans } [a, b] \text{ tel que } \int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^c f(t)\, dt + g(b) \int_c^b f(t)\, dt.$$

Tel est le théorème de la moyenne pour les intégrales ; sa démonstration guillerette passe par une succession d'étapes sautillantes qui font l'effet d'un torrent froid cascadant à flanc de montagnes.

Such is the mean value theorem for integrals; its proof is light-hearted, one quicksilver step after another resembling in their effect the cascade of a cold mountain stream.

Je n'utiliserai de cette proposition que le corollaire suivant :

Corollaire. _ Si g est monotone sur $[a, b]$ et à valeurs réelle, l'on a :

$$\left| \int_a^b g(t) \frac{d}{dt}\left(e^{2i\pi\phi(t)}\right)dt \right| \leq 4\, ||g||_\infty .$$

Preuve :

$$\left| \int_a^b \frac{d}{dt}\left(e^{2i\pi\phi(t)}\right)dt \right| = \left| e^{2i\pi\phi(c)} - e^{2i\pi\phi(a)} \right| \leq 2.$$

On applique ensuite la **proposition 3**.

Rien n'est plus séduisant, plus ensoleillé, plus clair qu'une belle intégrale

Dans le calcul intégral, l'approximation est suivie d'un affinement. Il est de la nature même de l'approximation de pouvoir être rendue de plus en plus fine, comme le cercle de l'artiste se change progressivement en portrait au moyen d'une accrétion de détails ; mais les principes qui guident la main du peintre lorsqu'il transforme une forme géométrique en un visage de jeune femme légèrement souriant, personne ne les connaît, car chaque artiste en apprend les secrets en silence. Les Mathématiques sont plus simples, ne serait-ce que parce que leurs principes sont plus explicites, et le mystère en est d'autant plus troublant qu'il est si souvent flagrant. Dans le cas de l'aire sous la courbe, l'affinement se fonde sur le principe simple qui veut que *quand le nombre de rectangles augmente, l'approximation devient de plus en plus précise.* On peut exprimer le même principe en disant que *quand la largeur de chaque sous-intervalle diminue, l'approximation devient plus précise.*

_ In the integral calculus, approximation is followed by refinement. It is in the very nature of approximation that it may be made better and better, the artist's circle passing to a portrait in steps, by means of an accretion of detail; but the principles that guide the artist's hand as he transforms a geometric shape into the slightly smiling face of a young woman, these no one knows, each artist learning the secrets in silence. Mathematics is simpler if only because its principles are more explicit, the mystery the more troubling because it is so often out in the open. In the case of the area underneath the curve, refinement proceeds by means of the simple principle that *as the number of rectangles increases, the approximation gets better and better.* The principle in question may equally be conveyed saying that *as the width of each subinterval decreases, the approximation gets better and better.*

II. _ *D'une main prompte, je construis une SÉRIE ENTIÈRE CONVERGEANT PARTOUT SUR LE CERCLE UNITÉ. Je l'entraînerai dans ma fuite, bien que cette convergence soit NON -UNIFORME.*

Considérons le polynôme : $\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{N-k}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{N+k}}{k}$ où $1 \leq n \leq N$. On peut le réécrire :

$- z^N \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k - z^{-k}}{k} \right) = -2iz^N \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ avec $z = e^{ix}$. D'après la **proposition 1**, cette quantité est bornée pour $x \in \mathbb{R}$ par $2A_1$. On en déduit le

Lemme 1. _ Pour tout z sur le cercle unité, pour tout $n \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $N \geq n$, on a

$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{N-k}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{N+k}}{k} \right| \leq 2\,A_1$. Ce polynôme peut être écrit : $\sum_{i=N-n}^{N+n} a_i z^i$,

avec $a_i = \frac{1}{N-i}$ si $i \neq N$, et $a_N = 0$.

Considérons un paquet de termes consécutifs extraits de ce polynôme, $\sum_{i=p}^{q} a_i z^i$, avec

$$N - n \leq p \leq q \leq N + n.$$

On a alors

Lemme 2 (majoration des paquets). _ Il existe A_2 tel que, pour tous les n, N, p, q tels que ci-dessous, et pour tout $z = e^{ix}$, avec $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, on ait $\left|\sum_{i=p}^{q} a_i z^i\right| \leq \frac{A_2}{|x|}$.

Preuve : *la force de la démonstration directe fait certes défaut, mais laissons simplement ces éléments entrer dans le débat comme de simples faits et leur statut dans la démonstration reposer sur ma parole. _ if this seems to lack the force of direct demonstration, then let those facts enter the discussion simply as facts, with their status in the proof resting on my say-so. _ Il s'ensuit toute une série de manœuvres tortueuses. _ There follows now a blaze of misdirection.*

Posons

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \text{ pour } z = e^{ix}.$$

On a

$$S_n \leq \frac{2}{|z-1|} = \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{\pi}{|x|}$$

De plus

$$\sum_{i=p}^{q} a_i z^i = \sum_{i=p}^{q} a_i(S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=p}^{q} a_i S_i - \sum_{i=p-1}^{q-1} a_{i+1} S_i = \sum_{i=p}^{q} (a_i - a_{i+1}) S_i + a_q S_q - a_p S_{p-1}$$

Ce qui $$\Rightarrow \left|\sum_{i=p}^{q} a_i z^i\right| \leq \frac{\pi}{|x|}\left(2+\sum_{i=p-1}^{q-1}|a_i-a_{i+1}|\right)$$

en majorant $|a_p|, |a_q|$ par 1.

Mais

$$\sum_{i=p}^{q-1}|a_i-a_{i+1}| \leq \sum_{i=-\infty,\, i\neq N \text{ et } i\neq N-1}^{+\infty}|a_i-a_{i+1}|+2,$$

en notant que

$$a_i-a_{i+1}=\frac{1}{(N-i)(N-(i+1))}$$

Et donc que la somme écrite a un sens. De plus

$$\sum_{i=-\infty,\, i\neq N \text{ et } i\neq N-1}^{+\infty}\frac{1}{(N-i)(N-(i+1))} = \sum_{k=-\infty,\, k\neq 0 \text{ et } k\neq -1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

et ce, grâce à un changement d'indice.

Finalement, $A_2=\pi\left(4+\sum_{k=-\infty,\, k\neq 0 \text{ et } k\neq -1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}\right)$ convient.

C'est alors que le mathématicien se livre à l'un de ces fluides bonds de l'imagination qui suffisent pour ranger les Mathématiques dans les arts du spectacle. _ And now the mathematician engages in one of those liquid imaginative leaps that suffices to characterize Mathematics as a performing art. _ Le mathématicien agit pour créer du sens là où il n'y avait auparavant que ces sommes en train de défiler interminablement d'un pas traînant. _ The mathematician acts to create sense where before there were only those sums tramping on and on.

Je vais construire maintenant une suite de polynômes $P_{j(j\geq 1)}$ correspondant à

$$n_j = 2^{j^3},\ N_j = 2\,n_j;$$

P_j est un polynôme de degré $3 \times 2^{j^3}$ tandis que P_{j+1} est de degré :

$$2^{(j+1)^3} > 3 \times 2^{j^3}.$$

Ceci prouve que les degrés des termes de P_j et de P_k, pour $k \neq j$, sont différents. Par ailleurs, si $|z| = 1$, $P_j(z) \leq 2A_2$, d'après le **lemme 1**, ce qui prouve que la série $\sum\limits_{j\geq 1} \frac{1}{j^2} P_j(z)$ converge normalement sur le cercle unité. Notons $f(z)$ sa somme, fonction continue sur le cercle unité.

À présent, $\sum\limits_{j\geq 1} \frac{1}{j^2} P_j\left(ze^{i/j}\right)$ définit une série entière, grâce à la propriété de non-chevauchement évoquée ci-dessus. Pour prouver que cette série entière converge vers $f(z)$ si $z = 1$, il suffit de majorer la différence entre une somme partielle de cette série entière et la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{j^2} P_J\left(ze^{i/j}\right)$ choisie de façon que, justement, cette différence soit un paquet de l'un des polynômes $P_j\left(ze^{i/j}\right)$.

Or, si $z = e^{ix}$ ($x \in [-\pi, \pi]$) et si j est tel que

$x + \frac{1}{j} \neq 0$, ce paquet est majoré par $\frac{1}{j^2}\frac{A_2}{\left|x + \frac{1}{j}\right|}$, ce qui prouve **le lemme 2**.

Il en résulte, en distinguant les cas $x = 0$ et $x \neq 0$, que la série entière converge encore vers f, pour $|z| = 1$.

Mais la convergence ne peut être uniforme sur le cercle unité. Soit en effet :

$$f_J(z) = \frac{1}{j^2}\sum_{k=1}^{n_J}\frac{\left(ze^{i/j}\right)^{N_J - k}}{k}.$$

Quand j tend vers $+\infty$, on doit avoir $\| f_j \|_\infty \longrightarrow 0$ (norme uniforme prise sur le cercle unité). Mais

$$f_j\left(e^{-i/j}\right) = \frac{1}{j^2}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{1}{k} \sim \frac{\mathrm{Log}\, n_j}{j^2} = j \log 2 \longrightarrow +\infty.$$

D'où la construction et le résultat final.

La notion de limite force un panorama à s'ouvrir, elle permet pour la première fois au mathématicien d'apercevoir des choses jusque-là invisibles et interdites, et éclaire d'une lumière crue et utilitaire des exercices intellectuels qui relevaient depuis longtemps en partie du mythe et en partie du mystère…

_ The mathematician still has room in which to maneuver, the concept of a limit prying open a panorama, allowing the mathematician for the first time to see unseen and forbidden things and suffusing with a hard, utilitarian light exercises in thought that had long been part myth and part mystery…

Théorème 1. _ *Il existe une série entière convergeant partout sur le cercle unité, mais non uniformément. En outre, l'on peut choisir cette série de façon que sa somme soit continue sur le cercle unité.*

Δ !! _ Même si j'énonce là une évidence des plus absolues, la nature, la portée de cette priorité de la création par rapport à notre réception de sa présence intelligible doit être explicitée avec exactitude.

Cette vue du monde (ce panorama), était invisible tant que le théorème n'était pas encore démontré. Le but était d'atteindre cet ineffable, ce point fixe dans la dispersion du sens et qui le renouvelle en le créant. Le but était de joindre la totalité du Théorème.

Quand le Théorème sera réduit en un *seul* réel pour nos quatre yeux étonnés, après une démarche rayonnante et un raisonnement *musical* pour notre claire sympathie, il est démontré.

III. *À travers ma paupière fermée, une SERIE ENTIÈRE CONVERGEANT UNIFORMÉMENT, MAIS NON NORMALEMENT, sur le cercle unité pénètre, atteint l'ombre ; elle triomphe, et le monstre intérieur est vaincu.*

Je prends volontiers appui d'un exemple dû à Hardy et Littlewood, et qui repose sur des méthodes développées par Van der Corput, spécialiste bien connu du cercle unité.

J'introduis donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inLogn}}{n^{3/4}} z^n$.

Je tiens à prouver qu'elle converge uniformément sur le cercle unité (bien évidemment, elle ne converge pas normalement). Soit donc $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi]$. Je pose aussi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ikLogk + ik\theta}.$$

Pour appliquer le critère de Cauchy uniforme, on utilise la transformation d'Abel, déjà utilisée, qui fournit

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n^{3/4}} e^{inlogn+in\theta} = \sum_{n=p}^{q-1} S_n\left(\frac{1}{n^{3/4}} - \frac{1}{(n+1)^{3/4}}\right) + \frac{S_{p-1}}{p^{3/4}} + \frac{S_q}{q^{3/4}}.$$

Je suppose avoir montré la majoration valable pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\textbf{(1)} \qquad |S_n| \leq A\sqrt{n}.$$

On aura alors

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n^{3/4}} e^{inlogn} \times z^n\right| \leq A\left(\sum_{n=p}^{q-1} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n^{3/4}} - \frac{1}{(n+1)^{3/4}}\right)\right) + \frac{2A}{p^{1/4}}$$

$$\leq A\left[\sum_{n=p}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{3/4}} - \frac{1}{(n+1)^{3/4}}\right) + \frac{2}{p^{1/4}}\right]$$

et la quantité majorante tend vers 0 quand $p \longrightarrow +\infty$.

Il suffirait alors que je puisse prouver l'inégalité **(1)**. Ce faisant, je vais comparer

$\sum_{k=1}^{n} e^{i(kLogk + k\,\theta)}$ à l'intégrale $\int_1^n e^{i\,(tLog\,t + t^{\theta})}\,dt$, et pour cela procéder par étapes et par lemmes. Soit *f* une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Vu la complexité de l'expression (ξ) ci-dessous, voilà qui peut sembler une tâche intimidante. Mais l'un des miracles secondaires de l'*Analyse Mathématique* est qu'il fournit, pour la première fois dans l'histoire intellectuelle, un ensemble de procédures très semblables aux algorithmes et qui, si on les comprend correctement, permet d'accélérer la démonstration de ce théorème, une besogne qui serait autrement pénible et difficile. L'expression à démontrer se décompose de six parties, que j'ai séparées par des lemmes. Chaque partie possède à son tour une structure simple, la première exprimée comme une soustraction :

Et posant,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{S}(f,\, a,\, b) = \displaystyle\sum_{h \geq k \geq a} e^{2\pi i f(k)} \\ \mathrm{I}(f,\, a,\, b) = \displaystyle\int_a^b e^{2\pi i f(k)} \\ \Delta(f,\, a,\, b) = \mathrm{I}(f,\, a,\, b) - \mathrm{S}(f,\, a,\, b) \end{array}\right. \qquad (\xi)$$

Lemme 1. _ Si $p \leq q$ sont dans $\mathbb{N}$, et si f est C^1 sur $[a, b]$, on a

$$\left| \Delta(f,\, p,\, q) - \int_p^q \frac{d}{dt} e^{2\pi i f(t)} \left(\mathrm{E}(t) + \frac{1}{2} - t \right) dt \right| \leq 1.$$

Preuve :

$$\int_p^q \frac{d}{dt} e^{2\pi i f(t)} \left(\mathrm{E}(t) + \frac{1}{2} - t \right) dt = \sum_{k=p}^{q-1} \int_k^{k+1} \; \ldots.$$

$$= \sum_{k=p}^{q-1} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \int_k^{k+1} \frac{d}{dt} e^{2\pi i f(t)}\, \mathrm{d}t - \left[t\, e^{2\pi i f(t)} \right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} e^{2\pi i f(t)} dt \right)$$

(J'ai utilisé : $\mathrm{E}(t) = k$ *si* $t \in [k,\ k+1[$, et une intégration par partie appliquée à $\displaystyle\int_k^{k+1} t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{2\pi i f(t)})\mathrm{d}t$)

La quantité précédente vaut au bout du compte

$$\sum_p^{q-1} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) e^{2\pi i f(k+1)} - e^{2\pi i f(k)} - (k+1)\, e^{2\pi i f(k+1)} + k\, e^{2\pi i f(k)} \right) + \int_p^q e^{2\pi i f(t)}\, \mathrm{d}t = \Phi, \text{ avec}$$

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{k=p}^{q-1}(e^{2\pi i f(k+1)} + e^{2\pi i f(k)}) + \int_p^q e^{2\pi i f(t)}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi = -\sum_{k=p}^{q} e^{2\pi i f(k)} + \int_p^q e^{2\pi i f(t)}\,dt + \frac{1}{2}e^{2\pi i f(p)} + \frac{1}{2}e^{2\pi i f(q)}$$

$$\Leftrightarrow \Phi = \Delta(f, p, q) + \frac{1}{2}e^{2\pi i f(p)} + \frac{1}{2}e^{2\pi i f(q)}$$

Lemme 2 _ Si de plus $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[a, b]$, on a

$$\left|\Delta(f, a, b) - \int_a^b \frac{d}{dt}(e^{2\pi i f(t)})\left(E(t) + \frac{1}{2} - t\right)dt\right| \leq 5 + \pi$$

Preuve : Soit $[p, q]$ le plus grand intervalle à extrémités entières inclus dans $[a, b]$. On a

$$\left|\int_a^p \frac{d}{dt}(e^{2\pi i f(t)})\left(E(t) + \frac{1}{2} - t\right)dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^p \left|\frac{d}{dt}(e^{2\pi i f(t)})\right|dt,$$ quantité elle-même égale à

$$\frac{1}{2}\int_a^p 2\pi\,|f'(t)|\,dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\left|\int_a^b (\;) - \int_p^q (\;)\right| \leq \pi$. De plus il est trivial que $|\Delta(f, a, b) - \Delta(f, p,q)| \leq 4$.

Le résultat final découle alors du **lemme 1.**

Lemme 3. _ soit f, C^2, telle que f'' soit de signe constant sur $[a, b]$, et telle que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[a, b]$.

Alors il existe A_3 (indépendant de f) tel que $\left|\int_a^b \frac{d}{dt}(e^{2\pi i f(t)})\left(E(t) + \frac{1}{2} - t\right)dt\right| \leq A_3$.

Preuve : Appelons **I** la quantité $\int_a^b \frac{d}{dt}(e^{2\pi i f(t)})\left(\mathrm{E}(t)+\frac{1}{2}-t\right)dt$.

La **proposition 2** permet d'écrire

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\int_a^b (2i\pi f'(t))e^{2i\pi f(t)}\,\frac{e^{2i\pi kt}-e^{-2i\pi kt}}{2i}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(u_k(1)-u_k(-1)\right)$$

avec la notation

$$u_k(\varepsilon) = \int_a^b f'(t)e^{2i\pi (f(t)+\varepsilon kt)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)+\varepsilon k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{2i\pi (f(t)+\varepsilon kt)})\mathrm{d}t.$$

Or $t \longmapsto \dfrac{f'(t)}{f'(t)+\varepsilon k}$, fonction homographique en $f'(t)$, est monotone, comme f'. On peut donc appliquer le **corollaire** de la **proposition 3** pour écrire :

$$|u_k(\varepsilon)| \le \frac{1}{2\pi}\times 4\times \, Sup\left\{\left|\frac{f'(t)}{f'(t)+\varepsilon k}\right|, t\in[a,b]\right\} \le \frac{2}{\pi}\frac{\frac{1}{2}}{k-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2k-1}.$$

Par conséquent $|\mathrm{I}| \le \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(2k-1)} = \mathrm{A}_3$.

Lemme 4. _ Si f vérifie les conditions du **lemme 3**, on a $\Delta(f, a, b) \le \mathrm{A}_3 + 5 + \pi = \mathrm{A}_4$.

Preuve : Cela résulte **des lemmes 2** et **3**.

Lemme 5 (majoration de $\mathrm{I}(f, a, b)$). _ Soit f, C^2, sur $[a, b]$ telle qu'il existe $\rho > 0$ vérifiant

$$|f''| \geq \rho \text{ sur } [a, b] \text{ ; alors } I(f, a, b) \leq \frac{4}{\sqrt{\pi\rho}}.$$

Preuve :

Premier cas *:* $f' \geq \lambda > 0$ sur $[a, b]$.

$$\int_a^b e^{2i\pi f(t)}\,dt = \int_a^b \frac{(2i\pi f'(t))\,e^{2i\pi f(t)}dt}{2i\pi f'(t)dt} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(e^{2i\pi f(t)}\right)\frac{1}{f'(t)}\,dt$$

et donc (**corollaire** de la **proposition 3**)

$$\left|\int_a^b e^{2i\pi f(t)}\,dt\right| \leq \frac{4}{2\pi} Sup\left\{\left|\frac{1}{f'(t)}\right|, t \in [a, b]\right\} \leq \frac{2}{\pi\lambda}.$$

La démonstration est analogue si $f' \leq -\lambda < 0$.

Deuxième cas *:* $f' \geq 0$ dans $[a, b]$. Supposons par exemple $f'' \geq \rho$ sur $[a, b]$.

Soit $c \in]a, b[$. puisque $f'' \geq \rho$, $f'(x) - f'(a) \geq \rho(x - a)$ si $x \in [c, b]$. Comme $f'(a) \geq 0$, on a, sur $[c, b]$, $f'(x) \geq \rho(c - a)$ et donc (1er cas) $\left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right| \leq \frac{2}{\pi\,\rho(c-a)}$.

De plus, $\left|\int_a^c e^{if(t)}\,dt\right| \leq c - a.$

Finalement, $\forall c \in]a, b[$, $\left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right| \leq \frac{2}{\pi\,\rho(c-a)} + c - a.$

Si $c = a + \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \in]a, b[$, on obtient $\left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi\rho}}.$

Sinon, c'est que $b \leq a + \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}.$

Alors

$$\left|\int_a^b e^{if(t)}\,\mathrm{d}t\right| < \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi\rho}}.$$

Le cas où $f' \leq 0$ dans $[a, b]$ est analogue.

Troisième cas : Cas général.

Il suffit compte tenu de la monotonie de f', de diviser $[a, b]$ en deux intervalles $[a, d]$ et $[d, b]$ où d est l'éventuel point d'annulation de f'.

Une démonstration qui n'en est pas tout à fait une, feront observer les puristes, mais qui en est assez proche pour que seuls les puristes s'en offusquent ; quoi qu'il en soit, les données tirées de la manipulation formelle corroborent les données empiriques qu'à donné l'examen informel du comportement de f ' pour certains de ses arguments.

Not quite a proof, purists will observe, but it is close enough so that only purists will scruple ; in any event, the evidence derived from formal manipulations corroborates the empirical evidence generated by an informal look at the behaviour of f ' with respect to a handful of arguments.

Lemme 6. _ Si f vérifie les hypothèses du **lemme 5**, on a

$$S(f, a, b) \leq (2 + (f'(b) - f'(a))\left(A_4 + \frac{4}{\sqrt{\pi\rho}}\right)$$ où A_4 est une constante indépendante de f.

On suppose pour fixer les idées que $f'' \geq \rho$ sur $[a, b]$.

Preuve : Subdivisons $[a, b]$ en les points α_p tels que $f'(\alpha_p) = p - \dfrac{1}{2}$; $p \in \mathbb{Z}$. Bien entendu, il peut se faire qu'il n'y ait aucun tel point. En tous cas, il s'agit bien d'une famille finie, et croissante (car f' est strictement croissante). Notons $f_p(x) = f(x) - px$ sur $[\alpha_p, \alpha_{p-1}]$.

Alors $\left|f'_p(x)\right| = \left|f'(x) - p\right| \leq \dfrac{1}{2}$ et donc (**lemme 4**) $\left|\Delta(f_p, \alpha_p, \alpha_{p-1})\right| \leq A_4$.

Mais

$$\Delta(f_p, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = \Delta(f, \alpha_p, \alpha_{p+1}).$$

Donc

$$S(f, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = S(f_p, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = I(f_p, \alpha_p, \alpha_{p+1}) - \Delta(f, \alpha_p, \alpha_{p+1}).$$

Ce qui $\Rightarrow S(f, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \leq A_4 + \dfrac{4}{\sqrt{\pi\rho}}$ grâce au lemme 5 appliqué à f_p sur $[\alpha_p, \alpha_{p+1}]$.

Maintenant, $S(f, a, b) = \sum\limits_{p=r}^{n-1} S(f, \alpha_p, \alpha_{p+1})$, en posant $a = \alpha_r$, $b = \alpha$, (c'est-à-dire que l'on adjoint aux α_p les points extrémités de $[a, b]$). Donc,

$$\left|S(f, a, b)\right| \leq (s, r)\left(A_4 + \frac{4}{\sqrt{\pi\rho}}\right).$$

Mais

$$f'(\alpha_{r+1}) = r + 1 - \frac{1}{2}, f'(\alpha_{s-1}) = s - 1 - \frac{1}{2}.$$

Donc

$$f'(\alpha_{s-1}) - f'(\alpha_{r+1}) = s - r - 2\,,$$

ce qui $\Rightarrow f'(b) - f'(a) \geq s - r - 2$ (n'oublions pas que f' croît).

Finalement, $\left|S(f, a, b)\right| \leq (2 + f'(b) - f'(a))\left(A_4 + \dfrac{4}{\sqrt{\pi\rho}}\right).$

La démonstration est analogue dans le cas où $f'' \leq -\rho$ sur $[a, b]$. Il faut dans ce cas remplacer $f'(b) - f'(a)$ par son opposé.

Je vais à présent m'attaquer à la majoration de $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{i(k \operatorname{Log} k + k\theta)}$.

On peut écrire : $S_n = S(f, 1, n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2\pi}(x \operatorname{Log} x + x\theta)$.

Notons que $f'(x) = \frac{1}{2\pi}(\operatorname{Log} x + 1 + \theta)$, et que $f''(x) = \frac{1}{2\pi x}$.

Je décompose $S(f, 1, n)$ de la manière suivante :

$$S(f, 1, n) = S(f, 1, 2) + S(f, 2, 4) + \ldots + S(f, 2^{p-1}, 2^p) + S(f, 2^p, n)$$

avec $2^p \leq n < 2^{p+1}$, c'est-à-dire $p = E\left(\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}}\right)$.

On a, d'après le **lemme 6**

$$\left|S(f, 2^{k-1}, 2^k)\right| \leq \left[2 + f'(2^k) - f'(2^{k-1})\right]\left(A_4 + \frac{4}{\sqrt{\pi \times \frac{1}{2\pi 2^k}}}\right)$$

Soit $\quad \left|S(f, 2^{k-1}, 2^k)\right| \leq \left(A_4 + 2^{(k+5)/2}\right)\left(2 + \frac{1}{2\pi}\operatorname{Log} 2\right)$

et de même $\quad \left|S(f, 2^p, n)\right| \leq \left(A_4 + 2^{(p+6)/2}\right)\left(2 + \frac{1}{2\pi}\operatorname{Log} 2\right)$

Donc

$$\left|S(f, 1, n)\right| \leq \left(2 + \frac{1}{2\pi}\operatorname{Log} 2\right)\left(A_4 + 2^{(5/2)} \sum_{k=1}^{p+1} \left(\sqrt{2}\right)^k\right).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{p+1} (\sqrt{2})^k = \frac{(\sqrt{2})^{p+2} - 1}{\sqrt{2}-1} \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1} 2^{p/2} \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{n},$$

Soit

$$\left|S(f, 2^p, n)\right| \leq A_5 \left(A_4 + A_6 \sqrt{n}\right) \leq A_7 \sqrt{n}$$

Et *c'est là* la conclusion souhaitée de la démonstration, l'affirmation du **Théorème 2** et l'endroit où le voyage avait commencé.

Théorème 2. _ Il existe une série entière convergeant uniformément sur le cercle unité, mais non absolument.

Δ !! _ Enseigner est un art. Mathématiser est un métier, et un métier difficile ; il y a un vocabulaire, une épreuve, une expérience qu'il faut faire et qui exige beaucoup de travail. Derrière les détails se dissimule un drame plus général, celui des relations nouées entre les idées.

Admettons l'idée selon laquelle, chaque belle métaphore ouvre littéralement des portes sur l'être. Alors, Peut-être qu'être enseignant, peut-être que donner l'amour de la science ou de la poésie, est une façon un peu plus concentrée, un peu plus complexe pour faire comprendre aux étudiants ce qu'est la merveille constante d'un futur.

« J'ai fait la magique étude du bonheur, qu'aucun n'élude. » RIMBAUD

Il ne suffit pas de *lire* que les démonstrations mathématiques sont belles ; le côté papier-crayon, modélisation théorique, qui occupe une grande partie de mon existence, m'oblige à participer au jeu. Je veux descendre sur le pré pour les vivre, goûter, tester, car les stratégies se jugent sur le terrain. …. Toute connaissance que n'a pas précédée une sensation m'est inutile.

Je n'ai jamais rien vu de lucidement beau dans l'univers mathématique, sans désirer aussitôt que toute ma tendresse le touche. En accueillant authentiquement dans mon petit grenier de sentiment et de compréhension l'amoureuse beauté de *l'analyse réelle et intégrales*, je puis dire que, l'effloraison de sa surface est merveilleuse. Je garderais pour longtemps en mémoire, ce paysage où mon désir s'est enfoncé ; ce pays ouvert où ma recherche se promène ; allée de Taylor Lagrange qui se referme sur les accroissements finis et se prolonge sur Rolle et le théorème des valeurs intermédiaires ; continuité des roseaux courbés uniformément sur la rivière d'un compact métrique ; ouvertures sur la théorie des ensembles ; apparition de la convexité dans l'embrasure des branchages. On peut y voir la courbure d'un objet sensuel par rapport à la tangente et répondre à cette question palpitante : au fait, à quelle vitesse ? Bref que de promesses illimitées. Je me suis promené dans les couloirs de fonctions et de belles formes sensuelles. J'ai vu se dérouler des printemps.

Dès ce jour, chaque instant de ma vie prit pour moi la saveur de nouveauté d'un don absolument ineffable. Ainsi je vécus dans une presque perpétuelle stupéfaction passionnée. J'arrivais très vite à l'ivresse et me plaisais à marcher dans une sorte d'étourdissement. J'ai porté hardiment ma main sur chaque concept de l'analyse réelle et me suis cru des droits sur chaque objet de mes désirs.

C'est dans les domaines des sciences et des Mathématiques que se manifestent les énergies créatrices et poétiques les plus profondes.

Anecdote _ Il y a quelques années, j'ai suivi un cours de logique mathématique de Thomas Wihler pour lequel je n'étais pas préparé _ pas préparé, en d'autres termes, pour la discipline que demandent les mathématiques, ni pour les exigences du raisonnement, ni pour le style glacial et réservé de Wihler. Celui-ci était un mathématicien extrêmement distingué. Le sujet était très difficile, si difficile qu'un jour quelqu'un eut l'occasion de se *plaindre* de la complexité d'une démonstration.

Wihler détourna son large torse du tableau pour faire face à la dizaine d'entre nous assis dans la salle de conférence. « *N'importe quel* imbécile, déclara-t-il calmement mais avec une immense conviction, peut apprendre n'importe quoi sur les mathématiques. Ce n'est qu'une question de patience. » « Mais *créer* quelque chose, ajouta-t-il, c'est une autre histoire. » Dans l'un de ces étranges éclairs d'intuition qu'il est parfois donné aux très jeunes gens de ressentir, je compris immédiatement que Wihler ne se réjouissait nullement de ses propres compétences, mais, les yeux fixés sur les objectifs inaccessibles auxquels *il* avait aspiré, nous avouait indirectement, à nous simples novices, qu'en matière de mathématiques lui aussi figurait parmi les imbéciles de l'humanité. Comme nous tous.

Anecdote _ *It was from Thomas Wihler that many years ago I took a course in mathematical logic for which I was unprepared _ unprepared, that is, for the discipline of mathematics, unprepared for the demands of argument, and unprepared for Wihler's glacial and remote style. Wihler was an enormously distinguished mathematician. The material was very difficult, so difficult that someone had occasion once to* complain *about the complexity of a proof.*

Wihler rotated his large torso away from the blackboard and toward the ten or so of us sitting in the lecture room. "Any idiot," he said calmly but with immense conviction, "can learn anything in mathematics. It requires only patience." He seemed curiously moved; a film came over his eyes. "In that queer moment of insight occasionally vouchsafed the very young, I understood instantly that Wihler was not revealing in his own accomplishments, but, with his own eyes fixed on the unattained goals to which he *had aspired, was confessing obliquely to us, an audience of impossibly callow young men, that when it came to mathematics he, too, belonged in the company of humanity's idiots.*
As do we all.

C'est très triste de ne pas avoir du génie. Pour ma part, j'aurais voulu créer. On aimerait être plus que ce que l'on est.

∆ !! _ Certes, il faut faire la part des hyperboles d'une ombrageuse modestie, mais **Einstein**, affirmant n'avoir eu de toute sa vie que « deux idées », ou **Heidegger**, pontifiant que tous les grands penseurs ont une seule pensée qu'ils exposent et réitèrent, attirent sans doute l'attention sur une vérité vitale.

Though they contain hyperboles of proud modesty, ***Einstein****'s claim to have had only « two ideas » in his entire life, and* ***Heidegger****'s maxim that all major thinkers have only one thought which they expound and reiterate throughout their works, may point to a vital truth.*

Théo Héikay-Universitaire/pdf