Le plaisir d'être dans la plus haute tenue et la plus haute exigence éthique

Tendez l'oreille, écoutez la course de la pensée : au centre inviolé des formulations séquentielles du déterminant, vous entendrez que c'est l'une des plus belles théories mathématiques. Vous apprendrez surtout que le réel peut être interprété au rythme des oscillations entre l'idée et la chose. Autrement dit, entre le concret et l'abstrait, un va-et-vient s'organise.

Cependant, derrière le voile du discours rationnel, la musique semble bien continuer à murmurer. Le son menace toujours d'entraîner après soi, avec la force d'une marée, les serviles stabilités du sens. Elle le fait dans tout jeu de concepts, dans tous les remous et dans tous les tourbillons des associations verbales, des êtres mathématiques.

Il m'arrive de dire que la belle équation est très précisément le murmure qui restitue au concept sa dimension musicale, qui enrichit, qui approfondit, la vie du concept.

Une équation authentique, un poème animé, un mouvement philosophique entièrement en harmonie avec sa théorie, ce serait le commentaire pertinent qu'un Mathématicien ferait des formulations séquentielles du déterminant.

Pour ma part, je ne me lasse jamais de m'exclamer « *mais qu'est-ce qu'elle est belle* ! », chaque fois qu'il m'arrive d'inscrire sur un tableau, les grands murs porteurs et les arcs-boutants de cette théorie. Pour moi, la logique animée de ses symétries congruentes, de ses motifs organiques, relève d'un miracle voulu — d'un miracle de la volonté tel qu'on peut le voir dans la célèbre représentation par Léonard de Vinci *De Divina Proportione* — de sorte que l'entendement humain en est dépassé.

Et c'est dans cette césure empreinte de tensions entre l'intelligibilité analytique et la perception, lorsque la connaissance marque une pause, que je peux accueillir sa beauté.

La manière dont la musique possède le Mathématicien, est une question à laquelle il n'a pas de réponse crédible, pour ne pas parler de réponse démontrable sur un plan matériel. Tout ce qu'il peut avancer, ce sont d'autres images.

Le foisonnement du monde phénoménal, son déploiement inépuisable d'énergies et de formes sensorielles et communicatives est de nature à saturer jusqu'à l'appétit le plus gourmand de perception, jusqu'aux plus vastes capacités de réception.

J'ai lu plus de mille fois la *Théorie des formulations séquentielles du déterminant*, mais chaque fois que j'ai l'occasion de la lire à voix haute, je découvre une autre couleur de cette théorie. C'est cela, la très grande poésie, et l'enseignement doit nous élever vers elle. « *Il me sera loisible de posséder la vérité dans une âme et un corps.* » nous dit **Rimbaud**. C'est ce que je m'évertue de faire, même durant mon ''silence'' : ce n'est pas parce qu'on n'écrit pas que l'on n'est pas dans la poésie. Cette expérience intérieure très sensuelle, est résumée dans cet article : il s'agit d'inventer un langage simultanément accessible à tous les sens.

C'est ce qui me fait dire que les couleurs, les formes et les sonorités métaphoriques du réel sont très largement en excès des capacités qu'à le Mathématicien dans sa pratique, de remarquer et de réagir.

Mais retenons que derrière les équations, se cachent des audaces de l'imagination, des sentiments impérieux, qui transcendent la logique et donnent à la science une touche artistique.

Anecdote métaphorique : Des millions d'yeux, je le savais, ont contemplé ce paysage, et pour moi il était comme le *premier sourire du ciel*.

Je m'explique. Le ciel est vide. Il n'est rempli que par le Soleil, grand témoin du silence du monde. Il est une façon de le regarder qui nous donne l'impression qu'il sourit. J'essaie de faire l'expérience de notre humilité face à lui. J'exprime ici une intuition qui est celle de la philosophie française au XX$^{\text{ème}}$ siècle : celle de ce que **Jankélévitch** a appelé le «*primultime* » (*prime* : premier ; *ultime* : dernier). Tout est à la fois premier et dernier. Chaque instant est *primultime*. Vivre chaque instant comme si c'était le premier. Il y a des leçons éthiques et pédagogiques à tirer de cette expérience-là : à chaque fois regarder le ciel comme la première fois. On dit beaucoup que la Mathématique comme la philosophie, est un art de l'étonnement.

Mais il y a un double statut de l'étonnement : — une pomme tombe et **Newton** découvre les lois de l'attraction universelle. L'étonnement est supprimé par la connaissance. Il s'agit d'aller au-delà des apparences : c'est le projet de la Mathématique; — mais, au lieu de supprimer l'étonnement, on peut le maintenir. Le monde est énigmatique, même quand on a tout expliqué et qu'on a dissipé tous les mystères. Plutôt que se demander à quoi sert cet article, il faut se demander d'où vient notre besoin d'avoir *les formulations séquentielles du déterminant* au principe du monde mathématique. L'une des leçons de cette expérience, est de pratiquer l'art de l'étonnement comme un émerveillement recommencé. *cf.* L'aphorisme de **Cioran** : «Le monde est un enfer dont chaque instant est un miracle. » Le but de mon explication sera de se rendre à terme inutile en vous donnant envie de lire cet article.

J'ouvre ici un espace permettant de libérer et d'être à l'*écoute* du concept en tant que concept, d'« *entendre* le concept parler » : ***Ma métaphore de travail***

Comment ne pas voir dans le **Lemme 1-1**, une quintessence de caractère et une intelligence subtile ? Les **Théorèmes 1-1 *bis*** et le **Corollaire 1**, de la **partie I**, tous sont issus d'une même origine, tous participent du même caractère d'opposition ou de révolte; tous sont des représentants de ce qu'il y a de meilleur dans l'orgueil humain, de ce besoin, trop rare chez ceux d'aujourd'hui, de combattre et de détruire la trivialité. De là naît, chez ces symboles, cette attitude hautaine de caste provocante, dans sa froideur. L'équation mathématique dans sa simplicité, dans sa mystérieuse concision, dans son charme intuitif, est froide, non par manque de sensibilité, mais par dégoût de la sentimentalité poisseuse, du bavardage psychologique, de la revendication, quelle qu'elle soit. C'est l'inébranlable résolution de ne pas être ému. On dirait un feu latent qui se fait deviner, qui pourrait mais qui ne veut pas rayonner. Attention, le feu le plus concentré est le plus brûlant de tous.

Dans la **partie II**, le **Théorème 2** semble nous dire « En fait, je n'ai qu'une seule prétention, c'est de ne pas plaire à tout le monde. Plaire à tout le monde, c'est plaire à n'importe qui. » Déclarations à rappeler sans cesse, surtout aujourd'hui, dans notre incroyable basse époque de frilosité résignée et grégaire.

Mais son **Corollaire 2**, ne manque pas de nous rappeler sa percussion du style, son économie, sa concision, sa fureur et sa beauté.
La Nature toute présente, de ce théorème et de son corollaire, captive et délivre. La simultanéité de la *captivation* et de la délivrance est l'essence du beau.

« Heureux, cent fois heureux sont ceux dont l'imagination vive et lubrique tient toujours les sens dans l'avant-goût du plaisir. » *Nous enseigne* ***Sade****. Happy few...* Il sera question de **Série génératrice** dans la **partie III.**

Ouvrez les yeux sur tout ce qui se passe. Tendez l'oreille, vous entendrez l'émotion poétique par le rythme même. Celle-ci commence par une **proposition**, suivie d'une série de **trois corollaires**. Comment ne pas s'attarder sur la façon de les scander, d'appuyer, de laisser courir ou d'interrompre le raisonnement. C'est le mérite de tous ces noms. L'espace et le temps s'ouvrent à l'infini. Tout redevient disponible à qui sait entendre et voir, à qui sait lire

Mais, n'entre pas dans l'infini qui veut. L'infini est catégorique. «L'infini est l'affirmation absolue de l'existence d'une nature quelconque» (**Spinoza**). C'est une affaire de goût.

Le goût est selon **Lautréamont** le nec plus ultra de l'intelligence.

Rappelez-vous la magnifique phrase de **Pound** que je cite : « *Nous devrions lire pour accroître notre pouvoir. Tout lecteur devrait être un homme intensément vivant. Et le livre, une sphère de lumière entre ses mains.* » Mais attention, il s'agit d'un pouvoir qui n'est pas de domination, mais de partage.

Écoutons **Bataille** : « *Marquez le jour où vous lisez d'un caillou de flamme, vous qui avez pâli sur les textes des poètes ! Comment peut s'exprimer celui qui les fait taire, sinon d'une manière qui ne leur est pas concevable ?* » Cela dit, la curiosité du lecteur va-t-elle plus loin ? On aimerait le penser, mais, malheureusement, il est de plus en plus difficile de rencontrer quelqu'un qui aime lire.

Pourquoi faudrait-il que l'énergie végétale ou animale se transforme dans notre espèce en fade relâchement ? Qu'est-ce donc qu'être *matheux* ? Être d'une gaieté libre et licencieuse. Je vais vous énoncer maintenant une paradoxale vérité d'expérience :

Nous sommes aujourd'hui bien en retard sur le XVIII^{e} en ce qui concerne la liberté de perception, de sensation, d'écoute des cinq sens. Je ne pense pas que nous ayons le moins du monde dépassé **Mozart**. C'est pourquoi tous les morts dont je parle sont pour moi bien vivants. Ils me montrent des expériences qui ont été vécues d'une manière particulièrement intense. Ils me prouvent qu'on ne peut ni lire ni écrire si on ne vit pas d'une certaine façon. J'écris donc pour leur rendre une voix. Il suffit d'ouvrir un livre pour sentir s'il y a une voix ou pas. Tout se joue à l'oreille. C'est musical. Et l'instrument, c'est la langue.

Le **Théorème 3** est une invitation à la luxure. La luxure, c'est à la fois l'action, la contemplation, la méditation – donc, une connaissance –, la multiplicité, la variété, la relativité, l'école pratique de l'espace et du temps, le plaisir de transmettre, la Mathématique vibrante des nerfs et de l'invention ; la victoire toujours renouvelée sur la mort et ses légions d'hystériques pleureuses ; bref, le jazz, le grand jeu. Nous nous rapprochons pour ainsi dire de **Rimbaud** ...

Dans cet *article*, j'essaie de ne pas laisser seulement apparaître les pensées qui me constituent, j'essaie de déployer ma propre pensée en recourant à l'altérité. Bref, je bouge, ce qui me donne des identités rapprochées multiples, je dérive, je glisse, je dialogue. La pensée est une conversation continuelle, un grand récit fourmillant. Une seule qualité physique, peut conduire l'esprit qui s'en occupe à une infinité de choses diverses. Penser, c'est faire de la musique, danser, donner des coups, détruire la suffisance ignorante de tous les pouvoirs.

Je m'accroche à l'espoir que ceux qui me liront, — je compte sur peu de lecteurs, et n'aspire qu'à quelques suffrages — entreront immédiatement dans un château enchanté, ils pourront se déplacer, en pleine lumière, d'une pièce à l'autre, les concepts, les démonstrations, les idées leur sauteront au visage. Tout le théâtre de ma vie est à eux.

Devrais-je insister ici sur mon amour de l'*Analyse Mathématique* dont l'histoire mouvementée me fait respirer ? Après tout, oui, puisque c'est aussi pour cette discipline qu'**Alain Connes** a écrit : « Pour un Mathématicien, pour comprendre une théorie, la pire des erreurs, serait de ne pas la lire à l'envers : voir l'énoncé d'un problème, et se créer sa propre image mentale, qui va faire la démonstration. Il faut être actif, et non lire passivement, la démonstration. » Je me mets à faire l'éloge des Mathématiques, moi ? Si !

Voici le premier commandement de l'art d'inventer : voulez-vous découvrir du nouveau ? Arrêtez de tricher.

La construction qui suit vise à lever le voile afin de trouver son lieu et sa formule.
Les formulations *séquentielles* du déterminant sont écrite, mais, pour en percevoir l'*illumination*, il faut les rendre à leur souffle, à leur rythme, à leur vision et à ce que **Cauchy** a raison d'appeler, par-delà leur propre sens, leur " ton fondamental ".

Autrement dit, la tonalité du dire ne doit pas détoner, et l'*universitaire* devrait parler en vertu d'un ton qui détermine la basse et les bases, et qui donne le ton à l'espace sur et dans lequel le dire poétique instaure un être. Ce ton, je le nomme ton fondamental de l'*Analyse Mathématique*. Par ton fondamental, je n'entends cependant pas une tonalité affective ondoyante qui accompagnerait seulement le dire : au contraire, le ton fondamental ouvre le monde qui reçoit dans le dire poétique l'empreinte de l'Être.

Les formulations *séquentielles* du Déterminant

Article publié & exposé par Théo Héikay _ le 22 nov. 2012 au Centre International de Rencontres Mathématiques

Résumé _ Le but de cet article est double : calculer les différentielles successives du déterminant, puis exprimer les polynômes symétriques élémentaires δ_k en fonction des sommes de Newton S_k et réciproquement. Dans un premier temps, je déterminerais explicitement la formule de **Taylor** pour le déterminant. Ensuite, j'appliquerais ce résultat au polynôme caractéristique, j'en déduirais une formule exprimant δ_k en fonction des sommes de **Newton** S_k. Enfin, pour inverser cette formule, j'introduirais une certaine série génératrice qui permet d'effectuer le calcul.

Partie I _ Développement Taylorien du Déterminant

1 _ Notations _ *Tout ce qui est exquis mûrit lentement.*

Soit n un entier strictement positif fixé une fois pour toutes. Notons $M(n, \mathbb{R})$ l'algèbre de Banach des matrices réelles de taille n, et $\det : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminant. Désignons par A une matrice inversible fixée et, pour tout entier $k \geq 0$, pour toute fonction f de classe C^k sur l'ouvert des matrices inversibles, notons $D^k f = d^k f(A)$ la différentielle k-*ième* de f au point A, qui sera considérée comme k-linéaire sur l'espace-produit $M(n, \mathbb{R})^k$. Le polynôme $H \longmapsto D^k \det\,(H \,\ldots\, H)_{k\text{-}fois}$, que l'on note $q_{k,A}$, est k- homogène en H et, en vertu de la formule de **Taylor**, on a :

$$\det\,(A + H) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\, q_{k,A}(H) \qquad (1)$$

Étant donné un entier $k \leq n$, notons :

$$E_{n,\,k} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} i\,\lambda_i = k \right\}.$$

Un élément λ de $E_{n,\,k}$ correspond à la partition de k dans laquelle apparaît λ_i fois le nombre $i \leq n$. En particulier, λ_i est nul dès que $i > k$. Par conséquent, à toute partition de k correspond bijectivement un élément de $E_{n,\,k}$. En outre, toute permutation σ du groupe $\mathfrak{S}_k$ des permutations de $\{1, \ldots, k\}$ opère de manière naturelle sur $\{1, \ldots, k\}$ qu'elle découpe en orbites. C'est donc naturellement que σ fournit une partition de k, et donc un élément λ de $E_{n,\,k}$. Cette correspondance est surjective mais non injective. En fait, elle induit une bijection entre $E_{n,\,k}$ et l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_k$, c'est-à-dire que σ et σ' définissent une même partition de k si et seulement si elles sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_k$. C'est ainsi qu'on pose, pour $\lambda \in E_{n,\,k}$:

$$\Gamma_k = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \lambda_i !\, i^{\lambda i}}$$

et je rappelle que $k!\,\Gamma_\lambda$ est le cardinal de la classe de conjugaison des $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ correspondant à λ, c'est-à-dire le nombre de permutations définissant la partition λ.

Fixons enfin quelques notations concernant les multi-indices. Pour tout n-uplets d'entiers relatifs $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on note $|a| = \sum_{i=1}^{n} a_i$, ainsi que :

$$\Delta_0 a = (a_1 + 1, \ldots, a_n)$$

et

$$\Delta_i a = (a_1, \ldots, a_i - 1, a_{i+1} + 1, \ldots, a_n), \;\; 1 \leq i < n.$$

Ces opérations s'expriment facilement en termes des tableaux d'Young attachés aux partitions. Les n-uplets $\Delta_0 \lambda$ correspondent au tableau d'Young de λ auquel on a rajouté une colonne constituée d'un seul carré. Les n-uplets $\Delta_i \lambda$ correspondent au tableau d'Young de λ auquel on a rajouté un carré sur une colonne de i carrés.

On pose aussi pour toute matrice $H \in M(n, \mathbb{R})$ et $1 \leq i \leq n$,

$$\varphi_{i,A}(H) = \mathrm{Tr}\,(A^{-1}H)^i \text{ et } \phi^a_A = \prod_{i=1}^{n} \varphi^{a_i}_{i,A}$$

avec la convention $\phi^a_A = 0$ si l'un des a_i est strictement négatif. Remarquons que, si $\lambda \in E_{n,\,k}$ et $\lambda' \in E_{n,\,k'}$, alors $\lambda + \lambda' \in E_{n,\,k+k'}$ et $\phi^{\lambda}_A \phi^{\lambda'}_A = \phi^{\lambda+\lambda'}_A$.

De plus, $\Delta_i \lambda \in E_{n,\,k+1}$ pour tout $0 \leq i < n$.

2 _ Calculs : méfions-nous de ceux dont la signification physique n'est pas explicite ...

Je suppose connue l'expression de la différentielle du déterminant en A, que je peux écrire $H \longrightarrow det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$. À l'aide des notations introduites, j'écris : $q_{1,A} = det(A)\phi^1_A$.

Le lemme suivant fournit les différentielles des ϕ^{λ}_A pour $\lambda \in E_{n,\,k}$, ce qui va me permettre de calculer $q_{k,\,A}$ par récurrence.

Lemme 1-1

(1) Soit $i \in \mathbb{N}$. On a $D\,\varphi_{i,\,A} = -\,i\,\varphi_{i+1,\,A}$.

(2) Soient $k < n$ et $\lambda \in E_{n,\,k}$. On a :

$$D\phi^{\lambda}_A = -\sum_{i=1}^{k} i\,\lambda_i\,\phi^{\Delta_i \lambda}_A.$$

Devrais-je préciser que, les mathématiciens *explorent un territoire*, ils ne le créent pas. Ils créent des instruments, pour y voir dans ce monde-là : c'est un monde qu'ils découvrent. Il est présent et on ne peut pas le modifier : il est tel qu'il est.

Ma preuve – Une impasse *est* le lieu de mes plus belles inspirations.

(1) _ Il suffit d'appliquer la formule de différentiation des fonctions composées, sachant que la différentielle de $A \longmapsto A^{-1}$ est $H \longmapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

(2) _ Comme λ_i est nul pour $i > k$, je peux écrire $\phi^{\lambda}_{A} = \prod_{i=1}^{k} \varphi^{\lambda_i}_{i,A}$. On a alors :

$$D\phi^{\lambda}_{A} = \sum_{i=1}^{k} D\varphi^{\lambda_i}_{i,A} \prod_{j\neq i} \varphi^{\lambda_j}_{j,A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi^{\lambda_i - 1}_{i,A} D\varphi_{i,A} \prod_{j\neq i} \varphi^{\lambda_j}_{j,A}$$

ce qui peut s'écrire, compte tenu du (1), sous la forme :

$$-\sum_{i=1}^{k} i\lambda_i \varphi^{\lambda_i - 1}_{i,A} \varphi_{i+1,A} \prod_{j\neq i} \varphi^{\lambda_j}_{j} = -\prod_{i=1}^{k} i\,\lambda_i\, \phi^{\Delta_i \lambda}_{A}.$$

C.Q.F.D.

Théorème 1

On a la formule :

$$q_{k,A} = (-1)^k k!\,det(A) \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (-1)^{|\lambda|} \Gamma_\lambda \phi^{\lambda}_{A}. \qquad (2)$$

Ma preuve – Toute la *valeur* de l'être humain tient à cette faculté de se surpasser …

Je vais démontrer ce résultat par récurrence sur k. La formule est valable pour $k = 1$, et supposons-la vraie pour $k < n$. On peut différencier (2) par rapport à A, ce qui donne :

$$q_{k+1,A} = (-1)^k det(A) \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (-1)^{|\lambda|} \Gamma_\lambda (\phi^1{}_A \phi^\lambda{}_A + D\phi^\lambda{}_A)$$

$$= (-1)^k k!det(A) \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (-1)^{|\lambda|} \Gamma_\lambda (\phi^{\Delta_0}{}_A \lambda - \lambda_1 \phi^{\Delta_1 \lambda}{}_A - \ldots - k\lambda_k \phi^{\Delta_k \lambda}{}_A).$$

Je vais maintenant regrouper les termes suivants les $\phi^\mu{}_A$ avec $\mu \in E_{n,k+1}$. Pour un μ donné, on note $\lambda^{(i,\mu)}$ l'unique élément de $E_{n,k}$ tel que $\Delta_i \lambda^{(i,\mu)} = \mu$. On a donc

$$\lambda^{(i,\mu)} = (\mu_1, \ldots, \mu_i + 1, \mu_{i+1} - 1, \ldots, \mu_n).$$

Remarquons enfin que, pour $\lambda \in E_{n,k}$, $|\Delta_i \lambda| = |\lambda|$. Par conséquent, pour tout i, on a $|\Delta_i \lambda^{(i,\mu)}| = |\mu|$. Finalement, on trouve que $q_{k+1,A}$ vaut :

$$(-1)^k k!det(A) \sum_{\mu \in E_{n,k+1}} \phi^\mu{}_A (-1)^{|\mu|} \left(\Gamma_{\lambda^{(1,\mu)}} - \lambda_1^{(2,\mu)} \Gamma_{\lambda^{(2,\mu)}} - \ldots - k\lambda_k^{(k,\mu)} \Gamma_{\lambda^{(k+1,\mu)}}\right).$$

Le coefficient devant $\phi^\mu{}_A$ vaut :

$$(-1)^p |\mu| \left(-\mu_1 \Gamma_\mu - \frac{2\lambda_1^{(2,\mu)} \mu_2}{1+\mu_1} \Gamma_\mu - \ldots - \frac{k\lambda_k^{(k+1,\mu)} (k+1)\mu_{k+1}}{k(1+\mu_k)} \Gamma_\mu\right).$$

Comme $\lambda_i^{(i+1,\mu)} = 1 + \mu_i$, il reste:

$$-(-1)^{|\mu|} \Gamma_\mu \sum_{i=1}^{k+1} i\mu_i = -(k+1)(-1)^{|\mu|} \Gamma_\mu.$$

Finalement, j'obtiens la formule annoncée. C.Q.F.D.

Corollaire 1

Soient A une matrice inversible et $H \in M_n(\mathbb{R})$. Alors on a :

$$det(A+H) = (det A) \sum_{k=0}^{n} \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (-1)^k \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i!} \left(- \frac{Tr(A^{-1}H)^i}{i} \right)^{\lambda i}$$

De tout ceci je peux déduire l'expression de la différentielle *k-ième* du déterminant. En effet, de même que la connaissance d'une forme quadratique permet, grâce aux formules de polarisation, de retrouver la forme bilinéaire qui lui a donné naissance, la connaissance de $q_{k,A}$ permet de retrouver $D^k\, det$. Pour cela, j'ai besoin de notations plus adaptées. Je désigne par $\varepsilon(\sigma)$ la signature de $\sigma \in \mathcal{C}_k$ et, lorsque γ est le i-cycle $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ par $\varphi_{\gamma, A}$ l'application :

$$\varphi_{\gamma, A}(H_1, \ldots, H_n) = Tr(A^{-1} H_{r_1} A^{-1} H_{r_2} \ldots A^{-1} H_{ri})$$

et vous pouvez vérifiez avec moi que cela ne dépend pas de la représentation choisie pour le cycle, car TrAB = TrBA (c'est-à-dire que choisir $(r_2 r_3 \ldots r_i r_1)$ donne le même résultat). Enfin, si $\sigma \in \mathcal{C}_k$ admet la décomposition en produits de cycles $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r$ alors :

$$\phi^{\sigma}_{A} = \prod_{i=1}^{r} \varphi_{\gamma_i, A}$$

et on vérifie que cela ne dépend pas de l'ordre choisi pour les cycles dans la décomposition.

Théorème 1 *bis*

On a la formule :

$$D^k\, det = det(A) \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_k} \varepsilon(\sigma) \phi^{\sigma}_{A}.$$

Peut-être est-il souhaitable, pour bien mener l'activité mathématique, d'avoir en soi, une force tournante, une oreille ouverte, une force musicale, comme si l'on était l'organiste d'une tempête arrêtée. La pensée console de tout et remédie à tout. Si quelquefois elle vous fait du mal, demandez-lui le remède du mal qu'elle vous fait, elle vous le donnera.

Partie II

Polynômes symétriques élémentaires et polynômes de Newton

Rappelons que l'on appelle *k- ième polynôme symétrique élémentaire* à *n – indéterminées,* le polynôme :

$$\sigma_k(X_1, \dots, X_n) = 1 \le i_1 < \dots < i_n \le n \,;\, X_{i_1} \dots X_{i_n}$$

Ceux-ci peuvent être définis par la relation dans $\mathbb{C}[T]$:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i T) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(x_1, \dots, x_n) T^k \qquad (3)$$

D'autre part, on appelle *k- ième polynôme de Newton,* le polynôme :

$$s_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

et, étant donné $\lambda \in E_{n,\,k}$, je note :

$$s^{\lambda} = \prod_{i=1}^{n} s_i^{\lambda_i} \text{ et } \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^{\lambda_i}.$$

Je propose dans ce paragraphe, de déterminer une formule explicite exprimant σ_k en fonction des s_i. En vertu du **corollaire 1** du **théorème 1**, je développe $\det(I_d + qH)$, où H est une matrice de $M(n, \mathbb{R})$ et I_d la matrice identité. Désignons par $x_1, \dots, x_n$ les valeurs propres complexes de la matrice H.

On a ainsi $\varphi_{i,\, I_d}(H) = \mathrm{Tr}(H^i) = s_i(x_1, \dots, x_n)$, et ceci ne dépend pas de l'ordre dans lequel ont été choisis les x_j car les s_i sont symétriques. Comme $q_{k,\, I_d}$ es k- homogène, je vais introduire les coefficients :

$$c_k(H) = (-1)^k \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (-1)^{|\lambda|} \Gamma_\lambda s^\lambda(x_1, \ldots, x_n), \qquad (4)$$

de sorte que :

$$det(\mathrm{I}_d + qH) = \sum_{k=0}^{n} c_k(H) q^k \qquad (5)$$

Théorème 2

On a la formule suivante, valable pour $1 \le k \le n$:

$$\sigma_k = (-1)^k \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (-1)^{|\lambda|} \Gamma_\lambda s^\lambda.$$

Ma preuve

Il suffit d'écrire que $det(\mathrm{I}_d + qH) = q^n \chi_H(T) = (-q^{-1})$, où :

$$\chi_H(T) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) T^{n-k}$$

désigne le polynôme caractéristique de H, et d'employer la formule (5).

On trouve $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = c_k(H)$.

Corollaire 2

Soient deux entiers positifs n et k tels que $k \le n$. Alors :

$$C^k_n = (-1)^k \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{\lambda \in E_{n,k} / |\lambda| = p} \Gamma_\lambda \right) (-1)^p n^p.$$

Preuve _ Il suffit de poser $\mathrm{H} = \mathrm{I}_d$ dans la formule (5).

Partie III _ Série génératrice des c_k

Maintenant que j'ai pu exprimer le polynôme symétrique σ_k en fonction des s_i, je souhaite obtenir l'inverse, c'est-à-dire obtenir s_k en fonction des σ_i. Pour cela je vais introduire une série formelle $f_H(T)$ à coefficients complexes définie par :

$$f_H(T) = \sum_{m \geq 0} c_m(H)T^m .$$

En un sens, l'égalité $c_k(H) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_k)$ permet d'étendre la signification des σ_k pour tout entier k. Dans un premier temps, je vais étudier les propriétés sommatoires des coefficients Γ_λ pour $\lambda \in E_{n,\, k}$.

Proposition 1

Soient f et $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ liées par la relation :

$$f(k) = \sum_{\lambda \in E_{n,\, k}} g_1(\lambda_1) \ldots g_n(\lambda_n), \ \forall\, k \geq 0 \qquad (6)$$

Posons $F(t) = \sum_{k \geq 0} f(k)t^k$ et, pour tout $1 \leq i \leq n$, $G_i(t) = \sum_{k \geq 0} g_i(k)t^k$ qui sont les séries génératrices respectives de f et des g_i. Alors on a :

$$F(t) = G_1(t)G_2(t^2) \ldots . G_n(t^n).$$

Corollaire 1

Sous les notations de la **proposition 1**, choisissons $gi(m) = \dfrac{1}{m!} z_i^m$ où z_i est un nombre complexe fixé. Alors on a $G_i(t) = exp\,(z_i\, t)$ et : $F(t) = exp \sum_{i=1}^{n} z_i\, t^i$.

Corollaire 2

Sous les notations du corollaire 1, on a :

$$f(k) = \sum_{\lambda \in E_{n,\,k}} \Gamma_\lambda (z_1)^{\lambda_1} \ldots\ldots (nz_n)^{\lambda_n}.$$

Corollaire 3

Posons $L_n(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{X^i}{i}$. La série f_H a un rayon de convergence infini, et on a, pour tout $q \in \mathbb{C}$, $f_H(q) = det\ exp\ L_n(qH)$.

Ma preuve

La relation bien connue $det \circ exp = exp \circ Tr$ donne :

$$det\ exp\ Ln(qH) = exp \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} Tr(qH)^i = exp \sum_{i=1}^{n} z_i (-q)^i$$

avec $-iz_i = s_i (x_1, \ldots, x_n)$, fonction dont le développement en série entière a un rayon de convergence infini. D'après le corollaire 3, il vient :

$$det\ exp\ Ln(qH) = \sum_{m \geq 0} c_m(H) q^m = f_H(q).$$

C.Q.F.D.

Voici une autre forme à la formule du théorème 3. Mais avant de l'énoncer, retenons que : Toute perception passe par l'intellect. Et il existe un sens particulier au service de cette perception. «*Si un Mathématicien travaille, il réfléchit à un certain champ où, là, il y a des êtres mathématiques ; il finit par jouer avec eux, suffisamment pour les rendre* *familiers.* » **Lichnerowicz**. Tous les Mathématiciens sont d'accord là-dessus. C'est lorsqu'on leur demande de réfléchir à ce qu'ils font vraiment que les uns se disent formalistes, d'autres platoniciens.

Théorème 3

Pour tout réel x, on a :

$$f_H(x) = \exp \int_0^x \quad Tr\mathrm{F}_n(sH)\,\frac{ds}{s}\,,$$

où $\mathrm{F}_n(\mathrm{X})$ est la fraction rationnelle:

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\,\frac{1\,-\,(-\,\mathrm{X})^n}{1+\mathrm{X}}\,.$$

Ma preuve

Il suffit de remarquer que $f'_H(q) \;=\; f_H(q) \;=\; Tr(HL'_n(qH))$, et que $X\,L'_n(\mathrm{X}) \;= \mathrm{F}_n(\mathrm{X})$

L'égalité (7) fournie que le corollaire 3 peut s'écrire formellement :

$$\sum_{i=1}^{n} z_i t^i = \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\sum_{k\geq\,1} f(k)t^k\right)^m$$

$$= \sum_{m\geq 1}\;\sum_{i\geq 1} t^i \left(\frac{(-1)^{m-1}}{m}\qquad \sum_{k_1+\,\ldots\,+k_m = i\,/\,k_j\geq 1} f(k_1)\,\ldots\,f(k_m)\right)$$

$$= \sum_{i \geq 1} t^i \left\{ \sum_{m \geq 1} \left(\frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\lambda \in E_{n,i} / |\lambda| = m} \frac{m!}{\lambda_1! \ldots \lambda_m!} \prod_{j=1}^{n} f(j)^{\lambda_j} \right) \right\}$$

où λ_j est le nombre de fois qu'apparaît j dans la suite $(k_1, \ldots, k_m)$. En effet, au vu du membre de gauche, on a $i \leq n$, et donc chaque k_j se trouve entre 1 et n. de fait, on a bien $\lambda \in E_{n,\, i}$, et $|\lambda| = m$. On en déduit que :

$$s_k = (-1)^k k \sum_{\lambda \in E_{n,k}} \frac{(-1)^{|\lambda|}}{|\lambda|} \times \frac{|\lambda|!}{\prod_{i=1}^{k} \lambda_i!} \sigma^{\lambda}.$$

Je peux mettre, pour terminer, cette formule sous une forme comparable à celle du **Théorème 2**.

Théorème 4

On a la formule suivante, valable pour $1 \leq k \leq n$:

$$s_k = (-1)^k k \sum_{\lambda \in E_{n,k}} (|\lambda| - 1)! \left(\prod_{i=1}^{n} i^{\lambda_i} \right) (-1)^{|\lambda|} \Gamma_\lambda \sigma^{\lambda}.$$

L'expérience intérieure

Cette formule est le point d'arrivée d'une théorie de relations, à travers un voyage, dont j'ai bien cru qu'il n'allait jamais finir. Elle m'a lentement contourné, noyé. Elle a pris son temps à ma place. Il s'agit d'une expérience toute personnelle, que rien n'oblige à communiquer, mais le ravissement qui en ruisselle, déborde malgré moi les tasses et va bleuir le papier. Et le papier à ce moment- là, est un buvard assoiffé…
Cette formule était là, mais voilée, assourdie. Maintenant, elle jaillit jour et nuit, à travers chaque note éparse.
Et il est vrai, aussi, que l'amour éduque des yeux attentifs. De tels yeux attentifs sont rares, l'amour est rare. Pour cette raison, les théoriciens-poètes fondent ce qui demeure. Il suffit donc, ami lecteur, d'entrer dans ce qui demeure. Ici. En vous interrogeant sur la logique comme question en pleine essence du langage.

La libre détermination de l'*Analyse Mathématique* semble lui conférer sa qualité conductrice. Elle serait un être action, en aval de l'action.

Cet article à caractère pédagogique, est la suite logique des thèmes que j'aborde dans le *Journal Intime* d'un Agrégé d'Université.

L'*Analyse Mathématique* m'accompagne depuis fort longtemps, et toujours, parce que chaque fois que je décide d'écrire sur ce sujet, il se passe toujours quelque chose de nouveau. L'écriture et la vie qu'on peut mener, par ailleurs, si elles se rejoignent, sont un événement considérable. L'expérience est une expérience intérieure, qui doit révéler le chemin que nous menons. En ce qui me concerne, ce chemin va en somme, de l'*Analyse Mathématique* qui n'est que trop évident dans cet *article*, jusqu'aux idées que je me fais de l'école, la forme suprême du loisir, comme le rappelle l'étymologie.

À travers la rencontre avec l'*Analyse Mathématique*, c'est également toute une réflexion sur notre relation à la science rigoureuse, à l'école, au monde, cette tension vers la transmission des savoirs et des connaissances qui se déploie. C'est aussi une belle manière de mesurer la richesse des *Mathématiques* dans sa relation à l'éducation, son expression de la beauté, d'**Euler** à **Cauchy**, de **Riemann** à **Lebesgue**.

Réalisé à partir de mes publications à caractère pédagogique lors d'un colloque scientifique au Centre International de Rencontres Mathématiques , à l'aide d'un attirail conceptuel impressionnant, cet *article* s'enrichit de grand récit, raconté le soir à mes enfants lors d'une veillée, en langage vernaculaire.

Comme nous l'enseigne **Hannah Arendt**, " Aucune philosophie, aucune analyse, aucun aphorisme, quelque profonds soient-ils, ne peuvent se comparer en plénitude et en intensité à une histoire bien racontée". Seules les histoires seraient enseignantes.

Bref, j'ai le sentiment d'être une petite chose sur cette planète et l'Analyse Mathématique me *sert à exprimer ça. Je m'amuse de faire des concepts que je véhicule, des objets philosophiques, au risque de me faire passer pour un pauvre husserlien qui n'a rien compris.*

De chaque formule retranscrite dans mon *article*, j'apprends avec quelle rapidité la vie suit ma plume.

Comme vous l'avez remarqué, c'est aussi un *article* de conversations, … ça veut dire que tout peut être écrit de façon rigoureuse, tout et bien entendu l'*Analyse Mathématique* en priorité qui ne va plus être cette sorte de discipline froide, impersonnels, où les jugements de valeur n'y auraient pas droit de cité où le non-dit prégnant, bride, brime le récit, l'empêche de se détacher de lui-même pour faire jouer le dire. Il n'y a pas d'indicible, pas de tabous, pas de terreur, il n'y a pas d'hallucinations, pas de difficultés insurmontables, pas de situations magiques: tout peut être décrit, absolument tout, et avec rigueur.

Dans cet *article*, j'essaie avant tout, d'être, un aventurier du langage conceptuel et de l'écriture, en prise sur le langage oral et ses musiques. Mais j'essaie aussi, par le langage et l'écriture, d'être un aventurier de la pensée qui explore, dans et par l'écriture et les êtres *mathématiques*, l'infini des sensations et des corps, l'éparpillement du sujet dans son rapport au concept, à la vie, aux images, au temps. J'essaie de raconter l'odyssée de l'enseignant que je suis, dans ses rapports à la transmission, à la science, à l'art, à la vérité, toutes choses qui constituent — au sein de la réflexion sur la transmission des savoirs et des connaissances que je pense indépassable — le destin de l'enseignant moderne ou post-moderne.

Centré autour de la question de l'*Analyse Mathématique* et des questions esthétiques qui lui sont liées, mes articles analysent et interprètent l'ensemble des concepts que je mets en scène dans mes cours — depuis les séries de **Taylor** jusqu'à l'intégrale abstraite de **Lebesgue** en passant par les distributions de **Schwartz** — je mets en exergue mes rapports à la pensée, à la philosophie et à l'art de la modernité.

Hé ! Pour moi, enseigner, c'est comme respirer. Ecrire, c'est mon combat quotidien contre le néant.»

Le cours d'*Analyse* tel que je le conçois, dans ses diverses formes et périodes, définit un autre rapport entre pensée et Mathématique, poésie et énergie, narration et admiration. Contre la faillite du savoir dogmatique ou de l'autofiction modernes, cet *article* brouille les catégories des genres et des formes, et plus généralement l'opposition entre vérité et imagination. Il ouvre ainsi un autre rapport à la modernité, hédoniste et ludique.

Les équations sont pleines d'histoires… On parle beaucoup des techniques de raisonnements, rarement du caractère ontologique de la réalité mathématique, de la signification des objets mathématiques. Que se passe-t-il dans une équation ? Qu'est-ce qu'un **développement taylorien** ? Que se disent les personnages ? Que fait ce polynôme caractéristique dans la démonstration du **Théorème 2** ? Il y intervient très calmement, mais qu'a-t-il fait avant et que fera-t-il après ? C'est tout cela que l'*Analyse Mathématique* nous force à demander et c'est ce qui m'intéresse précisément. Tout cela fait fortement appel à la subjectivité et pour peu qu'on soit porté à la rêverie, on peut pénétrer dans des équations, la nuit… C'est un récit, puisque cela raconte des histoires.

J'aimerais que le souvenir que mes étudiants des Classes Préparatoires et de Master I gardent de moi — pour peu que je perdure dans leurs mémoires — soit celui d'un universitaire qui essaie de devenir un bon entraîneur d'intelligences et dont la vocation est de lire avec les autres. Le théorème est avant tout la peinture, la chorégraphie, la musique et la calligraphie de l'âme. Un théorème est un tableau, une danse, une musique et l'écriture de la beauté tout à la fois. La lecture d'un théorème implique *responsabilité*, car c'est un mot qui contient celui de *réponse*, il faut répondre à une théorie, à la présence et à la voix d'autrui. Mais cela est devenu difficile sinon impossible dans une culture où le bruit est constant, qui ne réserve aucune plage de silence ni même de patience. Une étudiante m'avait dit un jour : « *Je souffre votre pensée*. » Lire un théorème, ce n'est pas souffrir mais, à proprement parler, être prêt à recevoir un invité chez soi, à la tombée de la nuit. L'image que reflètent les grands scientifiques, que ce soit pour **Andrew Wiles** ou **Alain Connes**, est celle d'un accueil à la pensée, à l'amour et au désir des autres, par la pratique de la Mathématique, l'écoute de sa musique et la connaissance de sa grammaire. C'est apprendre avec d'autres à mieux écouter. Voici pourquoi l'enseignement m'a toujours été indispensable alors que j'aurais pu, matériellement parlant, l'abandonner à plusieurs reprises. Mais dans l'organisation de mon existence, je l'ai toujours recherché comme un moyen de réunir autour de moi des lecteurs pour garder l'espoir que certains continueront d'aimer les scientifiques que j'ai tant aimés.

L'*Analyse Mathématique* représente mon idéal, le paysage avec l'écriture, la théorie en même temps que le poème. C'est magnifique de ne pas accepter la dislocation entre d'un côté ce qu'il y a à voir et de l'autre ce qu'il y a à dire. C'est la même chose.

Théo Héikay-Universitaire/pdf