L'art de se rapprocher de la diagonale, une idée *cantorienne*

Je n'ai jamais proposé d'explication, ni posé de question qu'il n'y ait eu d'abord un problème. Cet article est né de la résolution d'un problème proposé au concours de l'École Normale Supérieure de la rue d'ULM. La résolution d'un problème mathématique, est toujours l'évocation des morts qui, d'après moi, sont plus vivants que les vivants. À savoir que, quand j'ouvre un livre d'*analyse*, j'ai l'impression que ces vivants me parlent directement, comme s'ils étaient là, ce qui me repose intensément de tous les bavardages que j'ai été obligé d'ingurgiter, y compris à travers ceux que je fais moi-même dans une journée.

Alors, et tout à fait continûment, cette publication à caractère pédagogique passe à des récits où les personnages deviennent des *espaces topologiques* et *métriques*, *convergences simple*, *uniforme* et *diagonale*, *fonctions continues*, *limites* et *formulations séquentielles*, *valeurs d'adhérence* et *injections* et même des *espaces métriques compacts*. Que peuvent dire ces concepts muets et ces vivants aboyant, que savent-ils raconter, participent-ils à un dialogue orchestral géant où les esprits curieux ne tiendraient qu'un instrument ? Que semblent souffler la brise qui tourbillonne à travers la *convergence simple*, le fleuve turbulent de la *convergence uniforme*, le grand hurlement des *fonctions continues* et le silence de la *convergence diagonale* qui foisonne ? Dans quelle langue parle « ***l'art de se rapprocher de la diagonale*** » ? En quelle histoire survit-il, évolue-t-il ? En quelles évolutions multiples et racontables plongeons-nous avec lui, dans le même temps que lui ?

Pour faire entendre donc le bruit de fond de l'*Analyse Mathématique* et la voix des vivants, leur accompagnement, leurs rencontres, leurs rivalités, leurs amours qui ressemblent tant aux nôtres, j'ai appelé à l'aide l'ensemble de ce que nous permettent nos codes propres : le récit de la nouvelle, l'évocation poétique ou musicale, même les jeux de concepts, le but que le concepteur du problème s'était fixé, les expériences ou démonstrations scientifiques, enfin la méditation de la philosophie… en une mosaïque la plus proche possible de la réalité que je vis.

J'ai voulu que « ***l'art de se rapprocher de la diagonale*** » émette les mêmes bruits, rie aux même éclats, pleure les mêmes sanglots, sonne des mêmes chants, compose la même musique, dise les mêmes récits, médite à la même profondeur que l'*Analyse Mathématique* elle-même.

There has always been ground for suspicion in regard to the seemingly incontrovertible axioms of logic and the syntax in which they are so despotically incised.

Il y a toujours eu motif à suspicion à l'égard des axiomes apparemment irréfutables de la logique et de la syntaxe dans laquelle ils sont si despotiquement graves.

I. INTRODUCTION.

Oh ! Sueur d'angoisse !

Un vieux livre d'analyse me servant d'oreiller sous ma tête brisée…

Cette nuit blanche, la *convergence diagonale* dans un compact était discrète et splendide _ et je n'étais pas là pour la voir.

_ Attente d'une *fonction continue*. _ Éclat subit d'une *convergence uniforme* ; suffocations ; rejaillissements ; rechutes. _ Inertie de moi : qu'y suis-je ? _ Une fourmi _ une minuscule fourmi pensante sur les épaules des géants qui m'ont précédé.

Abandon à l'oubli des vagues de l'analyse ; volupté du renoncement ; être une chose.

Définition :

*Soit **A** un espace topologique, **E** un espace métrique, f (resp. f_n pour $n \in IN$) une application de **A** dans **E**. Si x est un élément de **A** tel que* $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(u_n)$ *pour toute suite u :* $IN \to$ ***A*** *telle que:* $x = \lim u$, *on dit que la suite* (f_n) converge en diagonale *vers f au point x.*

Si cela est vrai de tout $x \in$ ***A****, on dit que* (f_n) *converge en diagonale vers f sur **A**.*

On tire les bonnes méthodes du problème même qu'on se donne à résoudre. Les meilleures solutions sont donc locales, singulières, spécifiques, adaptées, originales. Si l'on doit accueillir authentiquement dans son petit grenier de sentiment et de compréhension les échanges de cette définition qui frappe si joyeusement à la porte, il faut être capable d'entendre la grammaire faite musique. Ce qui est en jeu ici, c'est l'audace grammaticale que l'on trouve dans cette définition. Réfléchir aux raisons d'existence d'une définition, d'un théorème ou d'un concept _ on peut très bien concevoir un ordre des choses dont ils seraient absents _, c'est réfléchir aux types de pénétration que nous leur permettrons ou qu'ils imposent dans l'étroitesse de nos existences individuelles.

I _ *Me réveiller au matin sur mon lit ; Avoir été bercé toute la nuit par les remous des* PROPRIÉTÉS LOCALES.

Toute grande propriété mathématique révèle son identité par les théorèmes auxquels elle donne naissance.

A great mathematical property reveals its identity in terms of the theorems that it makes possible.

Théorème 1. _ *ici A est un espace métrique ; B(x, t) est la boule ouverte de centre x et de rayon t > 0 ; d est la distance dans E.*

1. - *Si f est continue en x et si* (f_n) *converge en diagonale vers f en x, on peut écrire la relation ;*

$$\textbf{(1)} \qquad 0 = \lim_{n \to +\infty} \lim_{n \to 0^+} \left[\sup_{B(x,t)} d\,(f_n, f) \right]$$

Par ailleurs $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

2. _ *Si f est continue en x, si* **E** *= IR, si f est limite simple de la suite* (f_n) *sur* **A** *et si la suite* $n \longmapsto f_n$ *est monotone, alors la relation* **(1)** *implique la convergence diagonale de* (f_n) *vers f au point x.*

Primo : - Soit (Φ_n) une suite d'applications de **A** dans $IR_+ \cup \{+\infty\}$; l'existence de

$$\begin{cases} \psi_n(t) = \sup \Phi_n \in IR_+ \cup \{+\infty\} \\ \& \\ \alpha_n = \lim_{n \to 0^+} \psi_n \in IR_+ \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

est alors triviale. $\sup \Phi_n$ *dans* $B(x,t)$.

Comment ça ? Baissez cette main, Mlle Darling, *s'il vous plaît ;* je *vais* entrouvrir les rideaux pour laisser entrer un unique rayon de soleil ; mais laissez-moi dire, *je vous en prie,* que les choses sont *plus faciles* qu'elles ne semblent et que seule l'épaisseur du papier bible le plus fin vous sépare _ oui, *vous* _ d'une totale compréhension. _ Meaning what? Lower that hand, Ms. Darling, *please ;* I *will* open the dark shade to let a single shaft of sunlight shine through ; but let me say this, *please,* that things are *easier* than they look and that only the thickness of the finest India paper separates you _ yes, *you* _ from understanding everything.

Lemme : - *Pour que* α_n *converge vers* 0, *il suffit que* (Φ_n) *converge en diagonale vers* 0 *au point* x.

En effet, pour $0 < t \leq \frac{1}{n}$, nous avons

$$\psi_n(t) \leq \psi_n\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où les inégalités

$$0 \leq \alpha_n = \psi_n(0^+) \leq \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq +\infty.$$

La partie de IN* pour laquelle $\psi_n\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$ est finie comme le montre aussitôt l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de **A** tels que :

$$\Phi_n(x_n) > n \ \ si \ \ \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

et $$\Phi_n(x_n) > \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \qquad \text{sinon,}$$

avec $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ pour tout n ; en résultent les inégalités

$$0 \leq \alpha_n \leq \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} + \Phi_n(x_n)$$

pour n assez grand, et enfin le lemme lui-même.

Varient la manière de se déplacer, l'objet du déplacement, d'où l'on part, vers où l'on va, par où l'on passe, à quelle vitesse, par quel moyen, avec quel véhicule, à travers quels obstacles, dans quel espace et quel temps…

Secundo : _ **a)** L'égalité $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est triviale (pour $u_n = x$).

b) En posant $\Phi_n = d(f_n, f) : y \longmapsto d(f_n(y), f(y)),$

sous l'hypothèse $x = \lim_{n \to +\infty} (x_n)$, on a

$$\Phi_n(x_n) = d\,(f_n(x_n), f(x_n)) \leq d\,(f_n(x_n), f(x)) + d\,(f(x), f(x_n))$$

$$= o(1) + d\,(f(x), f(x_n))$$

qui tend vers 0 par continuité de f en x. Par suite, le **lemme** ci-dessus s'applique et fournit la relation cherchée.

… Certes, la différenciation des gestes et des opérations peut rendre les choses difficiles, mais il s'agit, en fait, toujours, d'une relation établie, construite, mise au point ; et une fois établies mille relations ici, là, un peu partout, au bout d'un certain temps, si vous vous écartez, cela fait tableau. Carte, au moins. On voit une théorie générale des relations…

Tercio : _ En gardant les mêmes notations, nous pouvons définir pour tout

$\varepsilon > 0$ un N et un $\rho > 0$ tels que

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour tout $n \geq N$ et

$$\psi_N(t) \leq \alpha_N + \frac{\varepsilon}{3} < 2\,\frac{\varepsilon}{3}$$

Pour tout $t \in \,]0, \rho]$. En supposant croissante la suite $n \longmapsto f_n$ on a, pour tout y *de* **A** et tout $n \geq N$,

$$f_N(y) \leq f_n(y) \leq f(y)$$

(ce sera d'ailleurs le seul point où interviendra la convergence simple de (f_n) vers f).

Plus précisément on a, pour $n \geq N$ et $t \leq \rho$,

$$\Phi_n(y) = f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_N(y) = \Phi_N(y),$$

d'où

$$\psi_n(t) = \sup(\Phi_n) \leq \sup(\Phi_N) = \psi_N(t) < 2\frac{\varepsilon}{3}.$$

Si u est une suite à valeurs dans **A** admettant x pour limite, il existe un $M \geq N$ tel que l'on ait à la fois $u_n \in \mathbf{B}(x, \rho)$ *et* $\left|f(u_n) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(par continuité de f en x). Le choix $t = \rho$ conduit alors, sous la seule hypothèse $n \geq M$, aux majorations :

$$\left|f_n(u_n) - f(x)\right| \leq \left|f_n(u_n) - f(u_n)\right| + \left|f(u_n) - f(x)\right| = \Phi_n(u_n) + \left|f(u_n) - f(x)\right|$$

$$\Phi_n(u_n) + \left|f(u_n) - f(x)\right| < \Phi_n(u_n) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \psi_n(\rho) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

qui justifient la convergence diagonale de (f_n) vers f au point x.

… C'est sans doute là la difficulté. Mais je plaide coupable, car j'ai l'habitude de l'abstraction par concept, et qu'un concept pris quelque part organise la totalité des choses.

Ces Théorème et Lemme, une fois démontrés, on peut en proposer d'autres remarques, sans lien direct.

Remarque : « Le berger de Virgile, fit observer le Dr Johnson dans sa célèbre lettre de reproche à lord Chesterfield, chercha l'amour et le trouva de pierre . » Cette obscure remarque fait référence aux *Églogues* de Virgile.

Par ces mots, le Dr Johnson voulait faire comprendre à un esprit de formation classique que l'amour peut être source de douleur et de désespérance. J'ai toujours été hanté par ces lignes ; comme bien des aphorismes de Johnson, elles mettent en évidence l'énigme profonde que sont nos états émotionnels _ le fait que, si habituels qu'ils soient, ils n'en sont pas moins infiniment mystérieux. Un paradoxe en entraîne un autre. Malgré leur caractère *in*habituel, les concepts mathématiques, eux, sont infiniment accessibles. À l'heure de leur mort, ceux qui se seront intéressés aux mathématiques auront connu les fonctions continues bien plus intiment que le cœur humain et ses tortueux détours. **Qu'un sujet aussi abstrait soit pour finir si lumineux ne peut que susciter l'émerveillement.**

Remark : « The Shepherd in Virgil, » Dr. Johnson remarked in his famous letter of rebuke to Lord Chesterfield, "sought for love and found him a native of the rocks." The obscure reference is to Virgil's *Eglogues.* Dr. Johnson wished to call vividly to a classically trained mind the fact that love may be the source of misery and desperate unhappiness. I have always been haunted by this line; like so many of Johnson's aphorisms it points to a profound puzzle presented by our own emotional states _ that despite their familiarity, they are infinitely mysterious. One paradox leads to another. The concepts of mathematics, despite their *un*familiarity, are infinitely accessible. At their deaths, those who have minded mathematics will have known the continuous functions better than the crooked human heart. **That so abstract a consideration should in the end be so lucid is a source of wonder.**

Δ !! _ Aux explications locales rigoureuses et réglées correspond une globalité mobile. Ce changement, ces transformations, errances, traversées suivent ou inventent, à chaque voyage, le chemin d'une relation.

Ce que nous devons appliquer, avec une clarté sans compromis, à un théorème, une définition, un concept, mathématiques, c'est une éthique du sens commun, une courtoisie qui soit à la fois des plus solides et des plus raffinées.

***Wait a minute*: Mastery of thought, of the uncanny speed of thought exalts man above all other living beings. Yet it leaves him a stranger to himself and to the world's enormity.**

***Attendez une minute* : La maîtrise de la pensée, de la mystérieuse vitesse de la pensée élève l'homme au-dessus de tous les autres êtres vivants. Mais elle le laisse étranger à lui-même et à l'énormité du monde.**

Peut-on dire que tout auteur, est un lecteur de soi, qui se subvertit lui-même avec une audace et une acuité particulières ? Il met à l'épreuve ses intuitions, son besoin de « réécrire les règles », et les oppose aux moyens formels et historiques de compréhension (ou de représentation, ou de composition musicale) qui sont à sa disposition. Il sait qu'il ne peut échapper à la circularité ludique dans laquelle le signifié signifie à son tour, et ce *ad infinitum*. Chaque chercheur décide de le devenir parce qu'il veut aller voir lui-même comment fonctionnent certaines choses et pourquoi elles fonctionnent ainsi, et pas autrement. En outre, il trouve irrésistible de faire *concrètement* quelque chose qu'il juge faisable. Il le juge faisable par intuition, avant de s'y attaquer. Il est irrésistiblement tentant de se lancer soi-même dans une entreprise qui possède les trois propriétés suivantes :

α) _ C'est faisable ;

β) _ Personne ne l'a encore fait (tout au moins ainsi) ;

δ) _ Quelqu'un d'autre le fera, si nous ne le faisons pas.

Et peut-être qu'être professeur de Mathématiques, peut être que donner l'amour de l'*Analyse Mathématique* est une façon un peu plus concentrée, un peut plus complexe pour faire comprendre aux étudiants ce qu'est la merveille constante d'un futur.

Il s'agit pour moi de créer les conditions favorables qui aident à comprendre, de sentir la portée d'une idée ou d'un concept, percevoir sa beauté, découvrir la clé d'un raisonnement ou d'une découverte. Je suis convaincu que cela vous déplace, vous transforme subitement *en quelqu'un d'autre.* Le réel, soudain, vous répond. Se crée alors un contact intime, serré, avec lui, contact qui procure une joie sans équivalent. On peut littéralement *se faire plaisir* avec la science, vibrer grâce à elle, c'est d'ailleurs pourquoi elle ne manque pas d'amants : comprendre aide à mieux ressentir.

Mon but est d'aider chaque étudiant, quel que soit son niveau, à percevoir suffisamment ce qui fait sens dans mes cours ou mes publications. Seuls les savoirs universitaires faisant sens pour l'étudiant pourront être assimilés durablement !!

Par ailleurs, pour faire évoluer une théorie scientifique, il me faut identifier ce qui se joue, ses points nodaux et ses points aveugles, ses lignes de force et ses lignes de fuite.

II_ *Dès l'aube, sortir _ jaillir, _ dans l'air tout renouvelé. Une branche des* PROPRIÉTÉS GLOBALES *vibrera dans le matin frissonnant.*

Théorème 2. - *Si (f_n) converge uniformément vers f continue, alors (f_n) converge en diagonale vers f sur* **A** *; la réciproque est vraie si* **A** *est un espace métrique compact.*
Si (f_n) converge en diagonale vers f sur **A**, *alors (f_n) converge simplement vers f et f est continue sur* **A**.

Je vais démontrer successivement les implications

$$(\mathrm{CU} + \mathrm{C}) \Rightarrow (\mathrm{CD}) \Rightarrow (\mathrm{CS} + \mathrm{C}),$$

puis la réciproque partielle

$$\mathbf{(CD)} \Rightarrow (\mathrm{CU} + \mathrm{C})$$

pour **A** métrique compact.

1. - Si x est une limite de $u_n \in \mathbf{A}$ et si N est tel que l'on ait à la fois

$$d(f(u_n), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\sup_{\mathbf{A}} d\,(f_{n'}, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on en déduit l'inégalité

$$d\,(f_n(u_n), f(x)) < \varepsilon$$

qui définit la convergence diagonale au point x.

2 - a) L'égalité $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n\,(x)$ est triviale (poser $u_n = x$).

2 – b) Si f était discontinue, il existerait un $a \in \mathbf{A}$, limite d'une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbf{A}$, et un $\alpha > 0$ tels que

$$d\,(f(u_p), f(a)) \geq \alpha$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'égalité

$$f\,(u_p) = \lim_{n \to +\infty} f_n\,(u_p)$$

permettrait de définir une injection croissante Φ pour laquelle on aurait

$$d\left(f_{\Phi(p)}(u_p),\ f(u_p)\right) < \frac{\alpha}{2} \qquad \text{pour tout } p.$$

Il existerait alors une suite $v : \mathbb{N} \to \mathbf{A}$ satisfaisant à $v_p = u_p$ pour tout

$$n \in [\Phi(p), \Phi(p+1)[,$$

admettant a pour limite et telle, par conséquent, que

$$f\,(a) = \lim_{p \to \infty} f_{\Phi(p)}\left(v_{\Phi(p)}\right) = \lim_{p \to \infty} f_{\Phi(p)}\,(u_p)$$

bien que l'on ait

$$d(f(a), f_{\Phi(p)}\,(u_p)) \geq d\,(f\,(a),\ f\,(u_p)) - d\,(f_{\Phi(p)}\,(u_p),\ f\,(u_p)) > \alpha - \frac{\alpha}{2}$$

Remarque :
Toute fonction étant limite uniforme (et simple *a fortiori*) d'une suite constante de fonctions, on voit que la convergence diagonale ne saurait résulter sans contraintes des deux modes de convergence usuels.

3.- a) Soit une suite (f_n) convergeant en diagonale, mais non uniformément, vers f. Nous savons que f est continue d'après ce qui précède ; en outre il existe un réel

$\alpha > 0$ tel que, pour tout N, il existe $n \geq$ N et $x \in$ **A** tels que

$$d\,(f_n\,(x), f\,(x)) \geq \alpha$$

Cela permet de construire une injection croissante Φ et une suite u : IN $\to$ **A** pour lesquelles on a

$$d\,(f_{\Phi(p)}\,(u_p),\ f\,(u_p)) \geq \alpha \quad \text{pour tout } p.$$

3.- b) Soit, si possible, une valeur d'adhérence a de la suite u ; il existe une injection croissante ψ pour laquelle

$$a = \lim_{p \to \infty} u_{\psi(p)}.$$

Il existe également une suite v : IN $\to$ **A** satisfaisant à $v_n = u_{\psi(p)}$, pour tout

$$n \in [\ \Phi \text{ o } \psi(p), \Phi \text{ o } \psi(p+1)]$$

admettant a pour limite et telle, par conséquent, que

$$f\,(a) = f_q\,(v_q)$$

et donc que $0 = \lim\limits_{q \to +\infty} d\,(f_q\,(v_q), f\,(v_q))$.

Or, pour $q = \Phi$ o $\psi(p)$, on a la minoration

$$d\,(f_q\,(v_q), f\,(v_q)) = d\,(f_q\,(u\ \psi(p)), f\,(u_{\psi(p)})) \geq \alpha.$$

Par suite l'ensemble des valeurs d'adhérence de u : IN $\to$ **A** est vide ; **A** n'est pas un espace métrique compact.

Remarque :

On peut également prouver que la convergence diagonale implique que, pour tout $x \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $t > 0$ pour lequel on ait :

$$\lim_{n \to +\infty} \ sup \, [\sup_{B(x,t)} d\,(f_n, f\,)] < \varepsilon$$

(raisonner par l'absurde) ; la définition de la compacité appliquée à l'égalité

$$\mathbf{A} = \bigcup_{x \in A} \mathbf{B}\,(x,\, t)$$

donne aussitôt le résultat.

L'application des réciproques contenues dans les **théorèmes 1** et **2**, est, en quelque sorte, une extension du **théorème de Dini** ; elle redonne ainsi le résultat " par ailleurs facile " de notre exercice de l'E.N.S. d'Ulm :

Every proof in mathematics returns ultimately to the place where it begins, the difference between the initial conjecture and the settled conclusion, which are, after all, one and the same thing, the intervening matter of decisive ***demonstration***. Toutes les démonstrations mathématiques retournent tôt ou tard d'où elles étaient venues, une ***démonstration*** décisive intervenant entre la conjecture initiale et la conclusion établie, lesquelles sont après tout la même chose.

Proposition :

Toute suite (f_n) *décroissante vers* 0 *de fonctions continues à droite sur* $[0, 1[$ *et admettant en tout point de* $]0, 1]$ *des limites à gauche* $f_n\,(x - 0)$ *convergeant vers* 0 *atteint uniformément sa limite sur le compact* $[0,1]$.

En effet, pour $x \in]0, 1]$, on a, sur $[0, 1] \cap] x - t , x + t [$,

$$\alpha_n = \lim_{n \to 0^+} [sup \mid f_n - f \mid]$$
$$= max\,(f_n\,(x - 0), f_n\,(x)) \to 0.$$

La Théorie écoute autant qu'elle parle.

Δ !! Il faut prendre le geste pendant que court la relation et la continuer ; il y a non seulement un commencement et une fin, il existe une sorte de vecteur. Voilà : je pense vectoriellement. Vecteur : véhicule, sens, direction, flèche du temps, index de mouvement ou de transformation. Donc chaque geste diffère, évidemment.

Δ !! C'est là l'essence de la liberté. C'est la licence contraignante de l'imagination et de la pensée. L'art, la musique, les mathématiques sont les formes les plus compactes et délibérées de cette liberté. Leur ouverture à la compréhension ou au malentendu, à l'accueil ou au rejet, leur caractère inépuisable, forment le meilleur accès dont nous disposions à l' « altérité », à la liberté, à la fois exaltante et abyssale, de la vie elle-même.

Par l'*Analyse Mathématique*, le verbe au futur vous est offert

Δ !! C'est le grand défi à la mort que le futur du verbe. C'est le grand défi au désespoir. Si nous ne pouvions rêver _ et rêver est une forme de ''*futurité*'' aussi _, il n'y aurait vraiment que la clôture de la brièveté et de la médiocrité de nos petites vies personnelles. Il est fantastique que nous soyons un animal qui ait des grammaires de ''*futurité*'', qui ait, comme dit Éluard, *Le Dur Désir de durer* et qui ait le moyen de l'exprimer. Si on nous enlevait les temps de futur, ce serait la vraie condamnation à mort.

Laissez-moi, au moins, rêver, maintenant, à un entendement du concept

Mes étudiants se crispent quand je prétends qu'avec le temps ces définitions et théorèmes leur sembleront beaux. *The class tenses at my claim that in time these definitions and theorems will seem to appear as a form of beauty.*

La relation de réciprocité entre la convergence dite diagonale et la convergence uniforme vers une fonction continue est une question de définition, et les définitions, si l'on en croit un cliché courant, sont arbitraires.

Le mot même de *définition* implique que, pour compliquée ou délicate qu'elle soit, comme dans le cas de la *limite*, une définition ne saisit pas le monde réel, qu'elle ne peut pas le saisir et qu'elle doit donc rester enfermée à tout jamais dans le cercle fermé des mots courants après les mots.

_ The very word *definition* compels the belief that no matter how complicated or delicate a definition may be, as in the case of the definition of a limit, it does not, it cannot, grasp the real world and must remain forever a part of the suspiciously closed circle of words chasing words.

_ Et pourtant les définitions de l'analyse parviennent brillamment à se libérer de ce morne manège de mots. Le théorème 1 montre alors qu'il y a convergence diagonale sur $[0, 1]$ (le cas $x = 0$ est analogue au cas général) ; le théorème 2 montre que la convergence est donc uniforme. J'invite toute bonne volonté de fournir également une notation sensuelle en la personne d'un symbole harmonieusement galbé.

L'idée est puissante et la future notation sensuelle s'ajoutera à toutes ces choses qui sont plaisantes à regarder dans le monde. Mais tout cela ne fait apparaître qu'un paysage restreint : ce que je veux mettre en évidence (dans un élan de foi) c'est un panorama.

_ The idea is a powerful one, and a sensuous notation adds to the stock of things in the world that are lovely to look at. But this suggests a limited landscape: what I am pointing to (and taking on faith) is a panorama.

De cette réciprocité se dégage donc une perception profonde de la nature du changement. Mais pourquoi *profonde* ? Qu'est-ce qui donne à cette vision du monde la profondeur que je lui attribue ? L'histoire de la philosophie est jonchée d'une multitude d'images frappantes mais stériles. Il y a la caverne de Platon, par exemple, avec ses ombres qui dansent indistinctement ; mais pour toute sa beauté obsédante et stimulante, *cette* image n'a pas avancé d'un pas en deux mille ans, fait que me rappelle souvent, lorsque je lis la philosophie, une voix intérieure insidieuse et harcelante qui me murmure *et alors* ?

_ But why *profound ?* What lends to this vision of the world the depth that I am claiming ? The history of philosophy is littered with countless striking but sterile images. There is Plato's cave, for example, with its dimly dancing shadows; but for all its haunting and provocative beauty, *this* image has gone nowhere in two thousand years, a fact of which I am reminded regularly, when I read philosophy, by an insidiously nagging inner voice saying *so what* ?

Mais dans la *réciprocité* du mathématicien, dans son engagement sous-jacent en faveur d'une certaine vision du changement, les choses sont très différentes et la voix insolente réduite au silence par l'infinie richesse de cette *réciprocité*. Au-delà de ce qu'elle montre, elle laisse entrevoir une manière de continuer la route _ une manière spécifiquement *scientifique.*

_ But with the mathematician's reciprocal, and its underlying commitment to a certain view of change, things are very different, an insolent *so what?* Silenced by the fact this reciprocal is infinitely productive.

Beyond what it shows, it suggests a way of going on _ the distinctively *scientific* way of going on.

Les plus puissants microscopes électroniques paraissent désormais approcher la limite de l'observation possible, tout comme, dans une obsédante symétrie, les radiotélescopes les plus scrutateurs. Ce n'est point que la lumière des lointaines galaxies ne nous atteigne pas ; dans l'allégorie de notre solitude, *jamais* elle ne nous atteindra.

The most powerful of electron microscopes now appear to be nearing the limit of possible observation as, in haunting symmetry, are the most probing of radio telescopes. It is not that the light from remote galaxies does not reach us; it will never *reach us in allegory of our solitude.*

PS : On ne voit qu'au moyen de concepts ; c'est une évidence rarement exprimée. Un sens sans concept permet de réagir immédiatement, pas de comprendre.

Le cheminement, foudroyant quoique *pas à pas*, de la découverte

L'image de la découverte est donc bien différente de celle que le grand public se représente : selon lui, on progresse du début à la fin par des raisonnements rigoureux, parfaitement linéaires, dans un ordre bien déterminé et unique qui correspond à la logique parfaite. Les zigzags lui sont inconnus. C'est dommage. Cela rend les mathématiques (et toutes les sciences) trop rigides, moins humaines, plus inaccessibles, puisqu'elles ne donnent pas le droit à l'hésitation et à l'erreur. Pourtant, on passe complètement à côté de choses évidentes, en cherchant des choses beaucoup trop compliquées. Ce n'est qu'en suite qu'on arrive à un résultat simple. Il y a des théorèmes qui sont difficiles au début mais simples une fois l'épuration faite. Ceux qui lisent le résultat final le trouvent presque évident et ont tendance à ne pas attribuer beaucoup de mérites au mathématicien qui l'a introduit. Ce résultat n'avait pourtant pas été trouvé avant lui, sans doute en raison d'une inhibition collective de la communauté scientifique qui interdisait la découverte. Par contre, certains théorèmes très compliqués à leur début le restent indéfiniment. Le théorème de la répartition des nombres premiers a ainsi certes été perfectionné, mais demeure aujourd'hui encore à peu près aussi difficile qu'il l'était au début.

La sèche et ses conséquences

Au cours d'une recherche scientifique, on est amené à se poser une certaine question (car il faut être curieux pour être un chercheur) dont la réponse tarde à s'imposer. La plupart du temps, après une première investigation, on se lasse. Parfois on continue, mais on ne trouve pas et on garde le problème dans un coin de sa tête pour y re-réfléchir plus tard. Il arrive qu'on trouve, inopinément, quelque chose de plus. Mais ce quelque chose n'est pas forcément intéressant et ne mérite peut-être pas de développement ni de publication. On peut cependant continuer à se poser des questions connexes ou même différentes, et se constituer ainsi un stock d'interrogations. Très souvent, on trouve simultanément la solution de beaucoup de ces problèmes.

La « sèche » est intrinsèque à toute recherche. Elle peut bien sûr devenir pénible si elle se prolonge trop. Mais, dans une certaine mesure, j'aime « sécher ». En effet, quand les choses marchent toutes seules, on a tendance à ne pas faire assez d'efforts. Au contraire, dès qu'on sèche, on désire à tout prix vaincre la difficulté, on tend toutes les forces de son organisme et au, bout d'une journée, on finit par trouver quelque chose. Pas forcément, certes, ce que l'on cherchait, mais sûrement quelque chose d'intéressant. Je suis heureux dès que j'arrive à une « sèche », et malheureux si elle est longue et pénible.

Après l'enthousiasme de la découverte subite, viennent forcément certains butoirs. On s'aperçoit alors qu'on s'est posé une mauvaise question ou, ce qui est plus grave, que l'on a formulé une définition mal appropriée à des développements ultérieurs. Il faut savoir opérer des changements douloureux. Quand, après une définition, on a échafaudé tout un plan de théorie, il n'est pas commode de se rabattre sur une autre définition. C'est pourtant souvent, comme on l'a vu ici, tout à fait indispensable, car il n'y a aucune raison pour qu'on trouve tout de suite la définition adaptée à tous les développements futurs. C'est là qu'il faut avoir le courage de tout recommencer.

En fait, c'est beaucoup plus facile qu'on ne l'imagine à l'avance, car on a tant tourné et retourné les connexions des différentes parties que les changements d'ordre ou le renouvellement de la question s'enchaînent comme une suite. C'est cette alternance de joie et de souffrance qui est au cœur de la recherche. Il faut y habituer les jeunes.

Les lycéens ont trop souvent l'idée qu'il est anormal de réfléchir plus d'une heure à un problème, alors que, pour trouver quelque chose de significatif, des jours et des jours sont parfois nécessaires – quand ce ne sont pas des années. Naturellement, on n'est pas obligé de réfléchir tout le temps au même problème.

Le lecteur qui lit un livre bien écrit ne voit plus quelles ont été les joies et les souffrances de l'auteur. Il peut être instructif de le leur dévoiler. On n'aurait pas le temps d'étudier, au lycée, les sciences avec leur histoire. On est obligé, la plupart du temps, d'enseigner de façon impérative et dogmatique. Mais on devrait, de temps à autre, non seulement faire chercher les élèves eux-mêmes, mais leur faire connaître l'histoire des sciences. La collaboration des historiens des sciences serait la bienvenue. Justement, cette discipline s'est remarquablement développée ces dernières années. Spécialisée il y a quelques décennies dans l'histoire antique, elle s'est tournée progressivement vers l'histoire contemporaine. Un peu d'historique est fécond dans l'exposé d'une théorie nouvelle.

Et on ne fait pas suffisamment aux élèves de lycée l'histoire des mathématiques pour leur montrer l'étendue des espaces franchis par nos prédécesseurs pour aboutir aux perfections actuelles. Il faut aussi qu'ils sachent que, si une théorie est bien faite mais que certains de ses aspects restent boiteux, ce sont probablement ceux-là même qui sont les plus intéressants pour des recherches à venir. Le but d'une science n'est pas d'ingurgiter des idées toutes faites et bien achevées, mais d'imaginer des conceptions nouvelles. Et celles-ci sont généralement engendrées par le dépassement d'obstacles internes.

Université d'Aix-Marseille · AMU ·

Théo Héikay-Universitaire/pdf