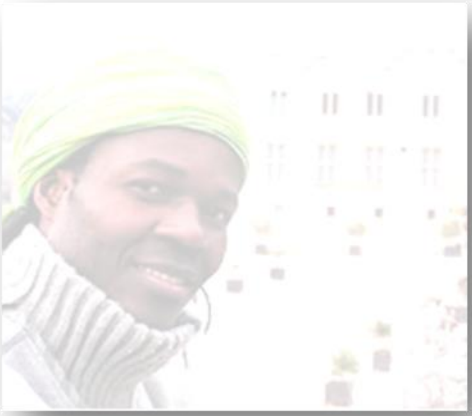

De l'Écriture comme Étrangeté et comme Jouissance

En situant mes réflexions dans un cadre poétique, j'ai voulu me donner à moi-même un « espace de liberté » _ une aire de jeu ! _, d'où je peux m'aventurer sur des chemins mal consolidés, comme on peut le faire entre amis. Les réflexions que je livre, à ces amis que sont mes étudiants de Master I, et mes proches, me permettent de m'affranchir des règles et des convenances, et de m'aventurer sur ces chemins de traverse que fréquentent si peu certains de mes collègues.

L'amitié dont je parle servira de pont entre nos deux rives, juste au-dessus de ce que les philosophes grecs appelaient l'étonnement.

L'amitié pour moi, est une conversation ininterrompue, un va-et-vient entre le potin (qui m'est étranger), la confidence et la réflexion partagée sur le monde. Le plaisir d'être d'accord et le plaisir, plus grand encore, d'être bousculé et d'être contredit. L'ami, c'est celle ou celui qui vous éclaire sur vous-même, qui vous libère de vous-même, qui vous fait cadeau de pensées, de formulations, dont vous seriez incapable.

Sans l'amitié, on serait emprisonné dans la prison de son moi. L'ami scie les barreaux de la cellule. Les copains peuvent être légion, mais l'amitié est rare.

Le récit qui accompagne cet article, s'inscrit dans la lignée des conteurs africains. Les équations parlent. Il faut savoir les écouter. Je propose un décryptage de cette rumeur. Je donne la parole aux suites de polynômes, aux interpolés de Lagrange et au célèbre Théorème de **Müntz** et **Szasz** sur la densité dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ de l'espace engendré par une suite de fonctions puissances d'exposants $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \ldots$ bref, aux éléments, composant un article atypique où les récits autobiographiques valent autant que les théories scientifiques. On croise ici des polynômes de **Bernstein** et de **Lebesgue** en perdition, des sommes partielles de la série de **Taylor** de la fonction entière et des polynômes de **Tchebychev** tombées au fond de crevasses, des savants étudiant seuls à la lueur jaune d'une unique lampe de bureau... Des *pseudo-polynômes* de Golitschek et des suites *hypertotales* au célèbre théorème de **Müntz** et **Szasz**, j'interroge notre rapport à la science, cette *réalisation de la pensée humaine* dont j'essaie de décrire le rythme. J'écoute les concepts à travers le langage des Mathématiques et j'essaie de retranscrire ce que me murmurent ces êtres mathématiques dans une langue particulièrement sensorielle. Le théoricien devient conteur. J'espère par moment, poète. J'ose surtout croire que mes lecteurs trouveront émouvant, profond et ludique ce qu'ils liront. S'il m'est impossible d'expliquer les Mathématiques sans recourir aux Mathématiques, mon article est conclu par un éloge de la joie.

La diffusion de nos idées suppose une narration qui elle, passe nécessairement par la langue ordinaire. Cette narration ne consiste jamais en une traduction pure et simple : mise en phrases, n'importe quelle équation mathématique perd toute concision et l'essentiel de sa puissance. Il n'est donc pas question de traduire symbole après symbole en langue naturelle. Il faut trouver des « trucs » permettant de verbaliser _ de baliser le verbe _ l'étrangeté des concepts mathématiques. Les équations ne parlant jamais d'eux-mêmes, il faut que quelqu'un le fasse à leur place.

J'essaie d'expliquer ici comment les idées me viennent … une manière de méditer la phrase d'**Aristote**: «Étonnez-vous, quel paradoxe».

Le *style* est le corps et l'âme de celui qui *s'exprime*

Quand j'ai une idée, elle me vient toujours en musique et en mélodie. Le scientifique que je suis devenu se plie toujours à la magie des concepts, au rythme de la démonstration, à la fête de l'intelligence. Il m'arrive souvent, à la fin de ma rédaction, de lire à haute voix mes cours et mes productions intellectuelles, que je venais d'écrire, pour en éprouver la qualité acoustique, la beauté et la perfection sonore. Je m'étais donné cette obligation comme devoir inévitable de préparation que chaque fois que je passais quelque part, j'essayais de laisser une solution réellement originale. Parce que chaque fois que je m'attaquais justement à un article, ce n'était pas un voyage pour rien, je ne m'en donnais le droit et le devoir qu'à condition que ce soit une gaité en colère. C'est la raison pour laquelle, j'ai besoin de sentir mon propre pouls battre, ma respiration et mon souffle périodique, mes contractions fibrillaires et le relâchement de mes muscles.

Certains pourraient voir dans cette manière de procéder, cette grande maladie démocratique qu'est le narcissisme. En démocratie, sous le régime de l'égalité des conditions, comme disait **Tocqueville**, on ne peut plus se reposer de son être sur son appartenance. On doit faire ses preuves et sans cesse recommencer. **Sartre** a merveilleusement résumé le tourment du narcisse moderne : en face de ce qu'on a été, on est toujours la même chose, rien. Moins certains sont sûrs d'eux-mêmes, plus ils se déclarent admirables. Je ne suis pas ainsi, cela ne veut pas dire que je sois exempt de tout narcissisme, cela veut dire plutôt que mon inquiétude narcissique ne s'en laisse pas conter.

S'agissant de mes articles, toutes ces théories inspirées traduisent ce que j'appelle « le bruit de fond », ce formidable chaos de sons à peine organisés que l'on peut entendre dans l'univers dès que l'on se tait et que l'on écoute la respiration de ces êtres mathématiques, leur souffle, leur fracas, le déchaînement des tremblements qu'ils génèrent; mais aussi les bruits de mon enveloppe corporel, le gargouillis de mes entrailles, les battements de mon cœur, le souffle de mes poumons. L'intelligence, une affaire de cœur ? Oui de cœur et de tripes, autant que de cerveau ! De ces doubles bruits de fond, jaillit la musique... Elle me met loin très loin de la rumeur sourde de la vie grouillante et affairée, du corps social pris dans sa frénésie de communication.

Je ne sais ce qui me fait dire que le style d'un auteur, c'est toujours de la musique : une partition manquée. Mais je ne peux pas le prouver.

Ce dont je suis sûr en revanche, c'est qu'on ne peut jamais être rejeté par une musique comme on peut l'être par une langue ou par un savoir.

En rédigeant mes cours et mes articles, je vois la musique des concepts mathématiques comme un océan énorme. Nous, nous nous tenons encore sur le rivage, perdus devant son immensité, devant cette masse liquide et transparente, sans nous rendre compte que nous nous tenons face au berceau de la vie, face à une matrice universelle d'où tout a jailli : les sons du monde, le langage rationnel, les savoirs, la culture, le ballet fécond des équations. Les anciens le savaient depuis longtemps, les modernes l'ont répété. Le philosophe **Platon** en son temps affirmait déjà que l'univers tout entier était fait de musique. Un peu plus tard, **Kepler** s'émerveillait de l'harmonie des sphères et du ballet musical des astres. **Galilée** laisse entendre que « la nature est un livre écrit en langage mathématique ». Autrement dit, la nature parle algèbre. Philosophes et scientifiques célébrant à l'envi la même vérité, profonde, cachée, oubliée, à savoir que la Mathématique et la musique sont universelles et que l'univers est à la fois musical et mathématique.

L'analyse *mathématique*, le pôle magnétique de mon *existence*

Il ne faut pas craindre de se rebeller, affirme **Alain Connes**
La seule autorité quand on fait des mathématiques, c'est soi-même

J'essaie de voir, ou plutôt d'écouter et de respirer, le jardin où je suis.
– Comment décrire et nommer le nouveau sujet ? –

Il ne s'agit évidemment pas d'un recueil de « recette » à appliquer à plus ou moins bon escient (il y en a d'excellents), mais d'une expérience personnelle liée à mes activités d'universitaire. Je me suis intéressé à l'analyse très tôt, j'ai passé la moitié de l'année 2011, printemps et automne – juste après la naissance de ma fille –, beaucoup de temps à *lire*, naviguer, m'exercer, respirer et m'émerveiller des exemples choisis pour cet article. L'*Analyse Mathématique*, voilà son secret, est un amplificateur. Si vous êtes heureux dans l'abstraction par concept – car un concept pris quelque part organise la totalité des choses –, vous le serez dix fois plus, malheureux, cent fois davantage. Tout dépend de votre disposition intérieure et de votre rapport aux Mathématiques.

Lire, c'est entendre les résonances, les assonances et les silences. C'est entendre les concepts qui se cachent sous les concepts.

Vertu inspiratrice de la lecture qui laisse advenir ce que l'on ne sait pas encore… Car c'est désormais la lecture qui accorde une raison d'être au texte.

Lire l'*Analyse Mathématique* ? Oui, et dans tous les sens :

1° _ S'agissant de la version générale du Théorème de Stone-Weierstrass, sur la densité dans $C(X, \mathbb{R})$ d'une sous-algèbre $\boldsymbol{H}$ unitaire et *séparante* ? Une *résurrection insolente*, traduisez une preuve, consiste à se ramener au Théorème de Stone sur les sous-espaces réticulés, en montrant que l'adhérence de $\boldsymbol{H}$ est stable par valeur absolue.

2° _ Henry Lebesgue réhabilite passionnément la *fonction valeur absolue* en montrant comment à partir d'une approximation polynômiale de $x \longmapsto |x|$ sur un intervalle, l'on pouvait approcher les fonctions continues affines par morceaux, et donc les fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

3° _ Mais alors, quel est ce rayon de lumière, tout à coup ? Dans l'un et l'autre cas, le lemme clé est de montrer que la fonction valeur absolue est limite uniforme sur $[-1, 1]$, d'une suite de polynômes.

4° _ J'essaie aussi dans cet article, de construire des ponts, de frayer des passages, d'interférer, de traduire les polynômes de Bernstein, Lebesgue, Tchebychev, … en ayant en point de mire la convergence uniforme sur un compact, en convoquant en cas de besoin, les séries de Taylor et de Fourier … sans perdre de vue l'étudiant(*e*), cette «merveille » dont parlait Sophocle. Mathématiques et culture enfin à égalité.

Ce qui est *jeu* dans l'analyse *mathématique*

L'analyse mathématique n'est pas un musée, mais une création constante. Si vous échappez aux clichés et aux bavardages qui critiquent l'interdisciplinarité, pour des raisons idéologiques ! – Je n'ai jamais apprécié cet éclatement, ni en général, les valeurs négatives, si estimées de mes contemporains, j'ai toujours préféré construire, ou plutôt composer, à détruire –, si vous avez réussi à éviter la porte ouverte au simplisme, alors vous savez ce que le mot « *découverte* » veut dire.

Le trésor de connaissances, de raisonnements, de normes et de règles, que l'idéal républicain avait mis tant de soin, de patience et d'austère générosité à transmettre, a-t-il été gaillardement bradé ? Mais non, voyez, écoutez, lisez : voici le lieu magique et futur dont certains artistes convenablement choisis et esprits libres témoignent.

J'ai rédigé cet article en essayant de susciter chez le lecteur le sentiment qu'il serait là au moment où s'écrit ce dont je parle. C'est-à-dire qu'il soit présent au-dessus de l'épaule de Müntz et Szasz. Toutefois, cet article élémentaire et concis, n'a pas l'ambition d'être un véritable traité ; aussi dans les questions qui auraient exigé de trop longs développements, seuls les résultats essentiels sont énoncés en esquissant mes idées de démonstration. Les lecteurs souhaitant un aperçu général sont invités à consulter ma prochaine publication dans une revue spécialisée, en s'armant d'un papier et d'un crayon, mais aussi de volonté et de patience et si possible d'assister à ma prochaine conférence qui se tiendra au Centre International de Rencontres Mathématiques de Marseille.

Mon ancien directeur de thèse, grand maître de l'astrophysique aux États-Unis, me disait autrefois : « Presque tout ce que nous faisons est écrit sur le sable, et s'efface dans le vent. Toutefois, il nous est peut-être donné d'avoir une tablette de métal sur laquelle nous inscrirons un ou deux signes plus durables. »

Cet article est écrit sur le sable. Mais la plage est belle, et je ne regrette pas de m'y être promené.

Introduction

La *convergence uniforme* sur le compact [– 1, 1] vers la fonction valeur absolue, dune *suite de polynômes* convenablement choisis.

J'ai engagé sept guides, nommés Weierstrass, Lebesgue, Bernstein, Tchebychev, Landau, Taylor et Fourier. Pourquoi eux, me dites-vous ? Parce qu'ils sont essentiels à toute tentative de discernement. Parce que les écarter interdit *de facto* toute possibilité de comprendre quoi que ce soit à l'énorme archive qui parle de la *convergence uniforme* sur le compact [– 1, 1] vers la fonction valeur absolue, dune *suite de polynômes* convenablement choisis. Parce que ces sept auteurs, aux visions qui fécondent et foudroient, nous mèneront par paliers successifs aux approximations de la fonction valeur absolue ; leurs œuvres sont de « l'âme pour l'âme », elles nous en montrent la voie. Nos chemins traverseront certaines suites de polynômes, en l'occurrence, les interpolés de Lagrange de la fonction valeur absolue sur des subdivisions régulières de [– 1, 1]. Nous emprunterons des passerelles pour démontrer le célèbre Théorème de Müntz et Szasz sur la densité dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ de l'espace engendré par une suite de fonctions puissances d'exposants $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, sans oublier les Mathématiciens Dini, Hahn-Banach, Cauchy, Minkowski, Fubini, Gramm et bien sûr Golitschek. Le trajet vous semble capricieux ? Le point de départ volontairement subjectif ? Je l'assume ! Toute lecture est sélective. La rencontre avec une théorie est à la fois psychologique, culturelle, éthique, spirituelle…

Car enfin, il s'agit toujours d'élargir notre visée. Et ces Mathématiciens, ces penseurs, situés dans la modernité, ancrés dans la modernité, ont pensé au plus près *l'immémorial.* Il est donc essentiel d'interroger leurs écrits en ce qu'ils ont de plus prophétique. Quelques preuves pour vous en convaincre ? Quelques mots en guise de décor, pour vous préparer au voyage ? Eh bien, d'accord, voici quelques éclats.

Il est grand temps d'entrer dans la chair du sujet. Sortons nos scalpels et apprêtons-nous à disséquer quelques formulations séquentielles qu'on trouve dans la littérature, pour réaliser cette approximation.

1° _ Si $B_n\,(f)$ est le nième polynôme de Bernstein d'une fonction f sur $[0, 1]$, on peut poser :

$$P_n(x) = B_n\left(\sqrt{x^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} C^k_n \sqrt{\frac{k}{n}}\, x^{2k}\,(1-x^2)^{n-k}\,.$$

Vous trouverez cet exemple dans G.G. Lorentz, *Approximation of Functions,* Holt, Rinehart and Winston.

Partant de $P_n(x) = \sum_{q=1}^{n} a_q\,(n)\,x^{2q}$, un calcul facile montre que les $a_q\,(n)$ sont donnés par

$$a_q\,(n) = \frac{(-1)^q}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{q} (-1)^k\, C^k_n\, C^k_q \sqrt{k}\,.$$

Si ces polynômes s'expriment simplement dans la base $x^{2k}(1-x^2)^{n-k}$, $0 \le k \le n$, des polynômes pairs de degré au plus $2n$, il n'en est pas de même dans la base naturelle, et de plus les coefficients $a_q\,(n)$ ne sont pas rationnels. On peut aussi utiliser le polynôme de Bernstein d'ordre $2n$ de la fonction $t \longmapsto |2t-1|$ et le transposer sur l'intervalle $[-1, 1]$. On obtient les polynômes :

$$P^*_n(x) = \frac{1}{n2^n} \sum_{p=1}^{2n} C^p_{2n} \, |n-p| \, (1+x)^p (1-x)^{2n-p}.$$

Sur la base usuelle, les coefficients des $P^*_n(x)$ sont aussi compliqués que ceux des P_n, bien que rationnels cette fois.

2° _ Les polynômes de Lebesgue sont formés en utilisant la somme des $n+1$ premiers termes du développement en série de la fonction $u \longmapsto \sqrt{1-u}$, et en y substituant $1-x^2$ à u, à partir bien sûr de l'égalité $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$. Exemple dû à S. Bernstein et C. de La Vallée Poussin, *L'approximation*, Chelsea Publishing. Un calcul classique donne :

$$L_n(x) = -\sum_{k=0}^{n} C^k_{2k} \frac{1}{(2k-1)2^{2k}} (1-x^2)^k.$$

Si les coefficients sont simples dans la base $(1-x^2)^k$ des polynômes pairs, il n'en est plus de même dans la base usuelle, puisque $L_n(x) = \sum_{q=1}^{n} b_q(n)\, x^{2q}$, avec :

$$b_q(n) = (-1)^{q-1} \sum_{k=q}^{n} C^q_{2k} \frac{1}{(2k-1)k\,!}.$$

3° _ Un troisième procédé pour obtenir une telle suite de polynômes est la convolution avec des polynômes « rendus à support compact » (méthode de Landau). Voir par exemple R.A. DeVore et G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag ou J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome 1, Hermann.

Soit φ la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$, prolongée affinement sur $[-2, -1]$ et sur $[1, 2]$, et par 0 sur le complémentaire de $[-2, 2]$, de façon à être continue sur $\mathbb{R}$. Posons, pour t réel

$$f_n(t) = c_n\left[1 - \left(\frac{t}{4}\right)^2\right]^n \chi_{[-4,\,4]}(t),$$

où la constante c_n est choisie pour que $\int f_n(t)dt = 1$. Alors, les polynômes :

$$C_n(x) = (\varphi * f_n)(x) = \int_{-2}^{2} \varphi(t)\, f_n(x - t)dt$$

convergent bien uniformément vers $|x|$ sur $[-1, 1]$. Mais si on veut calculer effectivement les coefficients des polynômes C_n dans la base usuelle, on se convainc assez rapidement qu'ils sont donnés par des sommes compliquées.

4° _ La méthode originelle de Weierstrass, en 1885 (voir en page 15, R. A. DeVore et G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag), consiste à convoler la fonction $|*|$ (ou plus généralement une fonction continue f qu'on veut approcher), prolongée pour être à support compact, comme ci-dessus, par la fonction :

$$t \longmapsto \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, exp\left(-\frac{t^2}{a^2}\right),$$

et à prendre une somme partielle de la série de Taylor de la fonction entière obtenue. Si on se limite aux termes de degré au plus $2n$, un calcul simple montre que si $a = \dfrac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}$, pour $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, les polynômes $W_{n,\,\varepsilon}$ ainsi obtenus sont donnés par :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p\, n^{(2p+1)\times(2-\varepsilon)-1}}{\sqrt{\pi}\, p\,!\,(2p+1)(2p+2)} \times$$

$$\times \left[(x+2)^{2p+2} + (x-2)^{2p+2} - 2(x+1)^{2p+2} - 2(x-1)^{2p+2} + 2x^{2p+2}\right].$$

5° _ Une méthode classique pour approcher des fonctions périodiques est bien sûr celle des séries de Fourier, en posant $x = \cos\alpha$ (voir S. Bernstein et C. de La Vallée Poussin, *L'approximation*, Chelsea Publishing).

En développant la fonction $\alpha \longmapsto |\cos\alpha|$, on obtient :

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k^2-1}\,T_{2k}(x),$$

où les T_n sont les polynômes de Tchebychev ($T_n(x) = \cos(n \arccos x)$). On prend alors comme polynômes de degré $2n$ approchant la fonction valeur absolue les polynômes

$$F_n(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k^2-1}\,T_{2k}(x).$$

Évidemment, ces polynômes sont loin d'être explicites.

6° _ Enfin, une dernière méthode classique pour construire une suite de polynômes répondant à la question est celle qu'on trouve dans **N. Bourbaki** (*Topologie générale*, chapitre 10, Hermann), qui définit par récurrence une suite de polynômes par :

$$\begin{cases} Q_0(x) = 0 \\ Q_{n+1}(x) = Q_n(x) + \dfrac{1}{2}(x^2 - Q_n^2(x)), \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Il est clair qu'on aura beaucoup de mal à trouver une formule explicite pour les coefficients de ces polynômes Q_n !

Ce qui vient d'être dit, autorise à risquer quelques remarques pertinentes :

Ma Remarque 0 _ Admettons un tant soit peu l'idée selon laquelle, là où nous lisons vraiment, là où l'expérience doit être celle du sens, nous faisons comme si le texte, le morceau de théorie, l'œuvre scientifique incarnait une présence réelle d'un être signifiant.

La lecture implique évidemment une interprétation. J'ai la conviction qu'il y a dans l'interprétation un pari — au sens pascalien — sur le sens d'une théorie. Il faut vouloir miser sur le sens d'une théorie, accepter de l'accueillir, de lui donner en notre être son existence. Même si cet invité du soir, pourrait nous déstabiliser ou nous déranger.

Ma Remarque 1

La suite de polynômes de l'exemple 6°, approche mal la fonction valeur absolue, puisqu'elle vérifie $\| Q_n - |*| \|_{+\infty} \leq \frac{2}{2+n}$, alors que le degré de Q_n est 2^n. Cette majoration est donc très loin de la meilleur qu'on puisse trouver, du point de vue de l'ordre de grandeur, car on sait que la meilleur approximation M_n en norme uniforme de la fonction valeur absolue par des polynômes de degré au plus $2n$ vérifie la relation exacte $\| M_n - |*| \|_{+\infty} \approx \frac{A}{n}$ pour une certaine constante A.

En ce qui concerne les polynômes de Landau, on peut voir facilement que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\| C_n - |*| \|_{+\infty} \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^{1/2-\varepsilon}}$. On a un léger mieux pour les polynômes de Bernstein P^*_n, puisqu'on a alors $\| P^*_n - |*| \|_{+\infty} \leq C\sqrt{\frac{ln^2}{n}}$ (mais il faut utiliser l'inégalité de grande déviation de Bernstein). Pour les polynômes P_n on n'obtient que $\| P_n - |*| \|_{+\infty} \leq C\left(\frac{ln^2}{n}\right)^{1/4}$. On voit aisément que les polynômes de Lebesgue vérifient $\| L_n - |*| \|_{+\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Et les polynômes $W_{n,\,\varepsilon}$ obtenus par la méthode de Weierstrass vérifient l'inégalité $\| W_{n,\,\varepsilon} - |*| \|_{+\infty} \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^{1/2-\varepsilon}}$.

Enfin, on a pour les polynômes F_n, l'inégalité : $\| F_n - |*| \|_{+\infty} \leq \frac{C}{n}$.

Ma Remarque 2 _ On pourrait penser à prendre comme suite de polynômes, les interpolés de Lagrange de la fonction valeur absolue sur des subdivisions régulières de $[-1, 1]$. Malheureusement, Bernstein a montré qu'une telle suite d'interpolés diverge en tout point de l'intervalle différent de -1, 0 et 1.

Les *interpolés* aux points de Tchebychev convergent, eux, avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n}$, mais ils sont à coefficients très « compliqués », et non rationnels …

Ma Remarque 3 _ Je ne m'intéresse pas ici à l'étude de la plus ou moins grande facilité que présentent les diverses suites de polynômes proposées pour le calcul numérique, d'ailleurs calculer $|x|$ ainsi n'est pas fascinant ! J'adopte un point de vue résolument esthétique, et seule la plus ou moins simplicité de leur expression, et éventuellement leur vitesse de convergence, est ce qui compte à mes yeux ici. En fait, aucun de ces polynômes n'est explicite, au sens où dans la base usuelle (rarement intéressante pour le calcul numérique) leurs coefficients sont eux-mêmes, des sommes « compliquées ».

§ _ De **Bernstein** à **Weierstrass**, en passant par **Lebesgue**, nous avons ici, une pensée polyphonique. En elle s'accordent plusieurs voix, qui nous invitent à nous promener de-ci de-là. Car l'une des grandes ruses de la pensée est de ne pas afficher ses propres limites.
Ces auteurs, en nous tendant la main, ont embrassé l'action puis tenu la dragée haute au découragement. Je salue en silence, ''le martyre'' du professeur _ la profession la plus orgueilleuse et la plus humble qui soit _ et ses heures de profonde détresse…

Mon *fil* d'Ariane

Je propose donc, d'abord de donner des suites de polynômes très simples à coefficients explicites dans la base usuelle, qui convergent effectivement vers la fonction valeur absolue uniformément sur $[-1, 1]$, cette convergence étant très simple à montrer. Dans un deuxième temps, nous verrons comment cette suite de polynômes peut se découvrir « naturellement » à partir d'une preuve relativement simple du célèbre Théorème de Müntz et Szasz sur la densité dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ de l'espace engendré par une suite de fonctions puissances d'exposants $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, preuve due à mes propres cellules grises (*rires*). Cela me donnera l'occasion de présenter simplement la condition suffisante de densité figurant dans ce Théorème, seule cette condition ayant un lien avec notre problème d'approximation de la valeur absolue. Dans une dernière partie, j'exhiberais une suite de polynômes dont toute sous-suite est totale dans tout espace $C([a, b], \mathbb{R})$, ce qui contraste avec la suite des monômes. Je terminerais par un appendice (partie IV) complétant la preuve du Théorème de Müntz et Szasz.

Je ne saurais insister sur cette puissance bouleversante dans l'intention que l'on trouve dans tous les grands Théorèmes. Derrière la composition du Théorème de Müntz et Szasz, par exemple, vous sentez que s'entrevoit le paradis, car il y a en amont toutes les lectures sur la mesure de Lebesgue, le Théorème de Fubini, le déterminant de Gram et le déterminant de Cauchy…. Vous avez dans les grands Théorèmes une charge à la fois philosophique, poétique et au niveau de l'harmonie une complexité et un travail qu'il n'y a pas dans une vision simpliste des mathématiques. Un beau théorème met en avant le génie humain mais également une intention sacrée. Comme dans un requiem de **Mozart**, par exemple.

Partie I

Des suites de polynômes à coefficients explicites convergeant vers la fonction *valeur absolue*

Je vais tout d'abord, présenter la suite de polynômes la plus simple. Elle à l'air de subir la loi de la gravitation. Toute lecture acquitte d'une dette d'amour. J'ai découvert cette suite particulière depuis ma lecture du mathématicien Golitschek, dans « *Journal of Approximation Theory* ». N'invente-t-on jamais du nouveau qu'issu des plus profondes racines ? Une fois la suite trouvée, je peux prouver sa convergence vers la fonction valeur absolue par des arguments sans rapport avec Golitschek.

Théorème 1 _ La suite de polynôme

$$R_n(x) = \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{1}{2k-1} x^{2k}$$

converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.

Je propose plusieurs démonstrations élémentaires directes de ce résultat, pouvant se situer à différents niveaux d'enseignement, et comportant des ingrédients théoriques différents, donnant des renseignements plus ou moins fins sur l'approximation obtenue.

Ma première démonstration

Il est immédiat, en mettant x en facteur, que l'on a deux expressions sous forme intégrale du polynôme R_n :

$$R_n(x) = \frac{C^n_{2n}}{2^{2n}}\, x \int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\, dt \qquad (1)$$

$$R_n(x) = \frac{C^n_{2n}}{2^{2n}}\, x \int_0^x [1 + (1-t^2) + (1-t^2)^2 + \ldots + (1-t^2)^{n-1}]dt \qquad (2)$$

En posant $\begin{cases} K_n = \dfrac{C^n_{2n}}{2^{2n}} \\ u_n(x) = K_n = \displaystyle\int_0^x [1 + (1-t^2) + (1-t^2)^2 + \ldots + (1-t^2)^{n-1}]dt \end{cases}$, il vient

alors $R_n(x) = x\, u_n(x)$, et la fonction u_n est impaire. Je vais montrer les deux propriétés suivantes :

$$\left|u_n\right| \leq M \text{ pour une certaine constante numérique } M\,; \qquad (3)$$

$$\forall\, \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1,\ u_n \text{ tend vers 1 uniformément sur } [\varepsilon, 1] \qquad (4)$$

Je montrerais d'abord que ces deux propriétés impliquent bien la convergence uniforme sur $[-1, 1]$ de $R_n(x)$ vers $\left|x\right|$. Comme R_n est pair, il me suffit de considérer $[0, 1]$, comme théâtre de ses opérations.

Soit $\varepsilon > 0$,

on a, si $0 \leq x \leq \varepsilon$, $\left|R_n(x) - x\right| = \left|x\, u_n(x) - x\right| = x\left|u_n(x) - 1\right| \leq \varepsilon\,(M+1)$, en utilisant la propriété (3).

Si $\varepsilon \leq x \leq 1$, $\left|u_n(x) - 1\right| \leq \varepsilon$ si $n \geq N(\varepsilon)$, par (4) ; donc $\left|R_n(x) - x\right| \leq x\,\varepsilon \leq \varepsilon$. J'obtiens donc bien $\|R_n - |*|\|_{+\infty} \leq \varepsilon\,(M+1)$ si n est assez grand.

Ma preuve de la relation (3)

Il suffit de supposer $x \geq 0$, dès lors, $u_n(x) \geq 0$. Ce faisant,

$$0 \leq u_n(x) \leq u_n(1) = K_n \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^p dt = K_n \sum_{p=0}^{n-1} I_{2p+1},$$

où $I_{2p+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p+1} u\, du$ est l'intégrale de Wallis.

Mais de la relation $qI_q = (q-1)I_{q-2}$, bien classique, je peux déduire la relation $qI_q\, I_{q-1} = \frac{\pi}{2}$, relation qui permet de montrer que $I_q \approx \sqrt{\frac{\pi}{2q}}$ quand q tend vers l'infini. Par suite, la série de terme général I_{2q+1} est divergente, et la somme de ses n premiers termes est donc équivalente à $1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{p-1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}}$, quantité elle-même équivalente à $\int_1^n \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, intégrale équivalente, quand n tend vers l'infini, à $\sqrt{n\pi}$

.

Mais il est classique que $K_n \approx \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$, ne serait-ce que parce que $K_n = \dfrac{2}{\pi} I_{2n}$ (la formule de Stirling n'est d'aucune utilité).

On a $0 \leq u_n(x) \leq u_n(1)$, avec $\lim\limits_{n \to} u_n(1) = 1$, ce qui donne bien la relation (3).

Ma preuve de la relation (4)

Si $x \geq \varepsilon$, on a $0 \leq u'_n(x) = K_n \dfrac{1-(1-x^2)^n}{x^2} \leq \dfrac{K_n}{x^2} \leq \dfrac{K_n}{\varepsilon^2} \approx \dfrac{1}{\varepsilon^2\sqrt{n\pi}}$. On obtient donc $\left|u_n(x) - u_n(1)\right| \leq \left|x-1\right| \dfrac{C(\varepsilon)}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{C(\varepsilon)}{\sqrt{n}}$. Comme $u_n(1) \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$, u_n tend bien uniformément vers 1 sur $[\varepsilon, 1]$.

Corollaire 1 _ La suite de polynôme :

$$R^*_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{1}{2k-1} x^{2k}$$

converge aussi uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.

En effet, dans la preuve précédente, seul l'équivalent de K_n a été utilisé.

<u>Ma Remarque</u> 4 _ On pourrait quantifier la démonstration précédente et montrer que l'erreur d'approximation $\| R_n - |*| \|_{+\infty}$ est $O\left(\dfrac{1}{n^{1/6}}\right)$, par exemple en coupant l'intervalle $[0, 1]$ en deux. Mais je montrerais plus loin qu'on peut obtenir une meilleure estimation, avec une autre preuve.

Ma Deuxième Démonstration

Je fais le changement de variable $t = \dfrac{ux}{\sqrt{n}}$ dans l'expression intégrale (1) de $R_n(x)$;

j'obtiens par conséquent :

$$R_n(x) = \sqrt{n}\, K_n \int_0^{n^{1/2}} \frac{1 - \left(1 - \dfrac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\, du = \sqrt{n}\, K_n \mathcal{J}_n(x) \qquad (5)$$

J'introduis pour commencer, un lemme classique:

Lemme 1 _ La suite $\left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n$ converge en croissant (si $n \geq a \geq 0$) vers e^{-u}.

On peut dériver la fonction $s \longmapsto f(s) = \left(1 - \dfrac{a}{s}\right)^s$, pour $a \geq 0$ et $s \geq a$, pour voir qu'elle est croissante. On peut aussi utiliser l'inégalité entre les moyennes géométriques et arithmétiques :

on a

$$1 \times \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \leq \left[\frac{1 + n\left(1 - \dfrac{a}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1} = \left(1 - \frac{a}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Il va en résulter que $\mathcal{J}_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$, quand n tend vers l'infini, vers :

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2x^2}}{u^2}\,du = |x| \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2}\,du$$

$$= 2|x| \int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}\,|x|.$$

On a en effet,

$$\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x) = \int_0^{n^{1/2}} \frac{e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\,du - \int_{n^{1/2}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2}\,du$$

(6)

Je décompose la première intégrale en intégrale de 0 à A et l'intégrale de A à $\sqrt{n}$. Sur le compact $[-1, 1] \times [0, A]$, la suite des fonctions :

$$(x, u) \longmapsto v_n(x, u) = \frac{e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}$$

tend vers 0 en décroissant, donc uniformément (appliquer le Théorème de Dini aux fonctions v_n, dont on voit facilement qu'elles sont continues). Par suite l'intégrale de 0 à A tend vers 0 uniformément sur $[-1, 1]$. L'intégrale de A à $\sqrt{n}$ est évidemment majorée par $\frac{1}{A}$. Enfin la troisième intégrale est majorée par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. J'en déduis donc que $\mathcal{J}_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $\sqrt{\pi}\,|x|$. La convergence du coefficient numérique $\sqrt{n}\,K_n$ vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ entraîne alors le Théorème.

Ma Troisième Démonstration

Le début est analogue : je pars de l'expression intégrale (5), mais je prouve la convergence par une majoration directe, plus subtile et plus calculatoire, de $\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)$. L'avantage de cette méthode, plus élémentaire, est d'obtenir un ordre de grandeur pour $\| R_n - |*| \|_{+\infty}$. Je vais détailler les diverses majorations à faire sous forme de lemmes : le premier précise la convergence du produit $K_n\sqrt{\pi n}$ vers 1, le deuxième complète le lemme 1.

Lemme 2 _ On a $0 \leq 1 - K_n\sqrt{\pi n} \leq \dfrac{1}{4n}$.

De la relation $K_n = \dfrac{2}{\pi} I_{2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, obtenue par l'encadrement :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} \leq I_p \leq \sqrt{\frac{\pi}{2p}},$$

je déduis les inégalités :

$$0 \leq 1 - K_n\sqrt{\pi n} \leq 1 - \sqrt{\pi n}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} = 1 - \sqrt{\frac{4n}{4n+2}} \leq \frac{1}{4n}.$$

Lemme 3 _

Si $0 \leq u \leq n$, et $n \geq 1$, n entier, on a $0 \leq e^{-u} - \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n \leq \dfrac{u^2}{n} e^{-u}$.

La première inégalité a été vue au lemme 1.

Puis, si $0 \leq t \leq 1$, il est clair qu'on a $e^{t} \geq 1 + t$, donc $(1 - t)\, e^{t} \geq 1 - t^2$.

Mais on a évidemment $(1 - t^2)^n \geq 1 - nt^2$;

j'en déduis donc que l'on a $(1 - t)^n e^{nt} \geq 1 - nt^2$.

Si je pose, pour $0 \leq u \leq n$, $t = \dfrac{u}{n}$, j'obtiens $\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n e^u \geq 1 - \dfrac{u^2}{n}$, soit enfin,

$$0 \leq e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \frac{u^2}{n} e^{-u}.$$

Il n'y a plus qu'à faire des majorations. On a

$$\left|R_n(x) - |x|\right| = \left|\sqrt{n}\, K_n\, \mathcal{J}_n(x) - |x|\right|$$

$$= \left|\sqrt{n}\, K_n\, \mathcal{J}_n(x) - \frac{\mathcal{J}(x)}{\sqrt{\pi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left|\sqrt{\pi n}\, K_n\, \mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left|\mathcal{J}_n(x)(\sqrt{\pi n}\, K_n - 1)\right| + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4n\sqrt{\pi}} \left|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x) + \mathcal{J}(x)\right| + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mathcal{J}(x)}{4n} + \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)\right|\right]$$

$$\leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)\right|$$

Reste à majorer $\left|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)\right|$. On reprend la relation 6° :

$$\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x) = \int_0^{n^{1/2}} \frac{e^{-u^2x^2} - \left(1 - \frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\, du - \int_{n^{1/2}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2}\, du$$

Le deuxième terme est clairement majoré par $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Le premier se majore, grâce au **lemme** 3, par

$$x^4 \int_0^{n^{1/2}} \frac{u^2\, e^{-u^2x^2}}{n}\, du = \frac{x}{n} \int_0^{x\, n^{1/2}} t^2\, e^{-t^2}\, dt \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4n}.$$

J'obtiens en définitive $\|R_n - |*|\|_{+\infty} \leq \frac{1}{4n} + \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$.

J'en déduis :

Corollaire 2 _ On a $\|R_n - |*|\|_{+\infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Précisément, la preuve ci-dessus donne la majoration $\|R_n - |*|\|_{+\infty} \leq \frac{1{,}3}{\sqrt{n}}$, et l'inégalité asymptotique $\limsup \sqrt{n}\, \|R_n - |*|\|_{+\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Il semble difficile d'obtenir mieux, car le deuxième terme de $\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}(x)$ dans (6) est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Corollaire 3 _ La suite de polynômes

$$G_n(x) = \frac{C^n_{2n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C^k_n \frac{2k}{2k-1} x^{2k}$$

converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$, et $\| G_n - |*| \|_{+\infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. La suite de polynômes

$$G^*_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C^k_n \frac{2k}{2k-1} x^{2k}$$

converge aussi uniformément vers la fonction absolue sur $[-1, 1]$, et on a aussi l'évaluation $\| G^*_n - |*| \|_{+\infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ma preuve du corollaire

Il est immédiat que l'on a

$$G_n(x) - R_n(x) = \frac{C^n_{2n}}{2^{2n}} \{1 - (1 - x^2)^n\} ;$$

J'en déduis l'égalité $\| G_n - R_n \|_{+\infty} = K_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Pour G^*_n, j'utilise le lemme 2.

C'est le polynôme G_n qui apparait naturellement lorsqu'on essaye de comprendre la preuve que je donnerai du Théorème de Müntz et Szasz, ou plus précisément de la condition suffisante de densité qui figure dans ce Théorème.

J'en viens maintenant à cette démonstration, qui fournira par la même occasion une quatrième preuve du Théorème 1, compte-tenu de l'égalité immédiate :

$\| G_n - R_n \|_{+\infty} = K_n$ vue au Corollaire 3.

Une lecture bien faite est en effet, une quête de la flamme de l'esprit dans la fixité momentanée de la lettre. La lecture d'un livre devrait être une rencontre. Je n'ai pas rencontré le Théorème de Müntz et Szasz en habits de tous les jours ou en tenue négligée. J'avais revêtu un habit de cérémonie, car la lecture est un acte de courtoisie, à l'égard du texte, une entrée en dialogue d'un lecteur avec un auteur et ses concepts.

Je suis convaincu qu'on est conscient de ce que l'on est que lorsqu'on est confronté à l'altérité. Bon entraîneur d'intelligences, je pleure d'émotion et d'espérance à l'idée que je pourrais le devenir… Oui, mon devoir est d'essayer de dépayser l'étudiant, le conduire là où il ne serait jamais allé sans moi et lui offrir un peu de mon âme, peut-être parce que toute formation est une déformation.

Partie II

Porte *ouverte* au Théorème de Müntz et Szasz

En voici l'énoncé :

Théorème 2 _ Soit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ une suite de réels tendant vers $+\infty$. Alors l'ensemble des fonctions $u_n : x \longmapsto x^{\lambda_n}$, $n \geq 0$ (où $x^0 \equiv 1$) est total dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ si et seulement si on a :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty. \qquad (7)$$

Ma démonstration de la condition suffisante du théorème

La partie classique difficile de ce Théorème est le caractère suffisant de la condition (7). C'est la seule qui m'intéresse en fait, et je renvois aux ouvrages de DeVore et Lorentz, Feller, Rudin ou Natanson, pour diverses preuves de la nécessité de cette condition. Je donnerais un peu plus loin, une version simplifiée car revisitée par moi-même, de celle de Natanson.

Pour établir que l'espace vectoriel $\boldsymbol{H}$ engendré par les fonctions (u_n), $n \geq 0$, est dense dans $C([0, 1], \mathbb{R})$, il suffit, grâce au Théorème de Weierstrass, de montrer que pour tout entier $q \geq 1$, différent de tous les λ_n, la fonction $x \longmapsto x^q$ est adhérente à l'espace vectoriel $\boldsymbol{H}_0$ engendré par les fonctions (u_n), $n \geq 1$. Il s'agit donc de construire une suite de « pseudo-polynômes » S^q_n de la forme:

$$S^q{}_n(x) = x^q - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}\, x^{\lambda_k} \qquad (8)$$

telle que $\| S^q{}_n \|_{+\infty} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Voici comment je construis ces *pseudo-polynômes*, pour $q > 0$ non nécessairement entier : je pose :

$$S^q{}_n \;:\; \begin{cases} S^q{}_0(x) = x^q \\ S^q{}_n(x) = (\lambda_n - q)\, x^{\lambda_n} \displaystyle\int_x^1 S^q{}_{n-1}(t)\, t^{-1-\lambda_n}\, dt, \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Il est alors immédiat que $S^q{}_1(x) = x^q - x^{\lambda_1}$; une récurrence évidente prouve alors que $S^q{}_n$ est bien de la forme (8).

Comme (9) donne aisément l'inégalité $\| S^q{}_n \|_{+\infty} \leq \left| 1 - \frac{q}{\lambda_n} \right| \| S^q{}_{n-1} \|_{+\infty}$, on obtient :

$$\| S^q{}_n \|_{\infty} \leq \prod_{k=1}^{n} \left| 1 - \frac{q}{\lambda_k} \right| \qquad (10)$$

et ceci implique bien que $\| S^q{}_n \|_{\infty} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, en vertu de la condition (7).

J'aimerais faire remarquer que pour $q = 1$ et $\lambda_k = 2k$, on obtient une nouvelle suite « constructive » de polynômes tendant uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue.

D'où viennent ces *pseudo-polynômes* ? Peut-on comprendre l'idée en filigrane ? Quels sont les polynômes obtenus pour $q = 1$ et $\lambda_k = 2k$?

En fait, on peut sans doute voir l'origine de ces *pseudo-polynômes* dans la méthode de W. Feller, utilisée dans « On Müntz Theorem and Completely Monotone Functions», *Am. Math. Monthly* 75 (1968), 342-350.

Mais celle-ci s'accompagne de développements sur les fonctions complètement monotones et d'arguments tirés de la transformation de Laplace qui compliquent inutilement le problème (même si cela donne un point de vue intéressant sur la question). En fait, les *pseudo-polynômes* de Golitschek, grâce au procédé intégral utilisé pour les construire (ce qui reste l'aspect mystérieux de sa méthode), vont apparaître comme des polynômes d'interpolation de Lagrange, à condition d'échanger les « variables » x et q. Si en effet on calcule naïvement les premiers $S^q{}_n$, on obtient successivement :

$$\begin{cases} S^q{}_0(x) = x^q \\ S^q{}_1(x) = x^q - x^{\lambda_1} \\ S^q{}_2(x) = x^q - \left[x^{\lambda_1}\dfrac{q-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} + x^{\lambda_2}\dfrac{q-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right] \\ S^q{}_3(x) = x^q - \left[x^{\lambda_1}\dfrac{(q-\lambda_2)(q-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + x^{\lambda_2}\dfrac{(q-\lambda_1)(q-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + x^{\lambda_3}\dfrac{(q-\lambda_1)(q-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\right] \end{cases}$$

On devine ainsi le résultat général:

Proposition 1 _ Pour $q > 0$, différent de tous les λ_k, et pour $x \in [0, 1]$, $x^q - S^q_n$ n'est autre que $L_n(f_x)(q)$, valeur en q du polynôme d'interpolation de Lagrange $L_n(f_x)$ aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ de la fonction f_x : $r \longmapsto x^r$ (définie sur $]0, +\infty[$).

Ma démonstration

Elle se fait évidemment par récurrence sur n ; on écrit la formule (9) donnant $S^q_{n+1}(x)$ en fonction de S^q_n ; on calcule les intégrales explicitement, on fait apparaître les termes souhaités, et on trouve exactement le résultat qu'on veut car les termes excédentaires disparaissent grâce à l'identité.

$$\frac{(q-\lambda_1)\ldots(q-\lambda_n)}{(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{\prod(q-\lambda_i)}{\prod(\lambda_p-\lambda_i)},$$

qui résulte de ce que le polynôme d'interpolation aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ de la *fonction identique* à 1 est … 1 ! Le détail des calculs, faciles, est laissé au lecteur. (Dans produit ci-dessus, $i \neq p$, mais varie jusqu'à $n+1$, *évidemment* !!)

En appliquant ce qui précède pour $q = 1$ et $\lambda_k = 2k$, les *pseudo-polynômes* deviennent des polynômes pairs, qu'on peut considérer sur $[-1, 1]$; ce sont eux qui font apparaître les polynômes G_n que j'ai introduis plus haut d'une autre façon :

Proposition 2 _ Pour $q = 1$ et $\lambda_k = 2k$, on a l'égalité $x - S^1{}_n(x) = G_n(x)$, et la majoration en norme uniforme sur $[-1, 1]$:

$$\| G_n - |*| \|_{+\infty} \leq \prod \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq \frac{exp\left(\frac{-\gamma}{2}\right)}{\sqrt{n}},$$

où γ est la constante d'Euler.

On retrouve ainsi le corollaire 3 du Théorème 1, ce qui donne une quatrième preuve de celui-ci, avec l'inégalité légèrement meilleure que celle dans la preuve du corollaire 2 de ce Théorème :

$$\| R_n - |*| \|_{+\infty} \leq \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\right] \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Une idée de ma démonstration

Écrire l'interpolé de Lagrange aux points $2, 4, \ldots 2n$ de la fonction $f_x : r \longmapsto x^r$, au point $r = 1$, et vous obtenez très facilement le polynôme G_n. Puis appliquer l'inégalité (10), et la majoration finale résulte de l'inégalité $\text{Log}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq -\frac{1}{2k}$ et de la décroissance de la suite $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \text{Log}\, n$ vers la constante d'Euler γ.

Ma Remarque 5 _ Si on utilise la majoration classique de l'erreur dans l'approximation d'une fonction $C^{+\infty}$ par son polynôme d'interpolation, on obtient sur [0, 1] l'inégalité :

$$\| G_n - Id \|_{+\infty} \leq Sup_{x \in [0,1]} \frac{|\mathrm{Log}\, x|^n x^c}{n!} \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

où $c \in\,]1, 2n[$. Cette indétermination sur le nombre c ne permet même pas de conclure que cette majoration tend vers 0 quand n tend vers l'infini : introduire les pseudo-polynômes S^q_n par une interpolation de Lagrange en intervertissant les variables x et q ne suffit pas, il faut en plus, pour une bonne majoration, disposer de mon expression intégrale (9) pour ces pseudo-polynômes S^q_n.

Remarquer que, si on considère les fonctions $u_q : x \longmapsto x^q \chi_{]0,1]}(x)$, alors on obtient $S^q_n \left[\prod_{p=1}^{n} (\lambda_p - q) \right] u_q * u_{\lambda_1} * \ldots * u_{\lambda_n}$, où la convolution est prise dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*_+$ muni de sa mesure de Haar $\frac{dx}{x}$. Je m'accroche à l'espoir que cela éclaire le lecteur sur les raisons de cette formule.

D'une certaine manière, prendre en charge une théorie, un théorème, une œuvre c'est prendre le risque de l'autre, de ce que l'on appelle l'intersubjectivité. La « bonne lecture » est donc forcément un pari sur la construction possible du sens, d'un consensus. Même si ce pari doit être constamment relancé, au vu des désaccords qui ne pourront que surgir autant de fois que nous relancerons les dés.

Partie III

Une suite de polynômes dont toute *sous-suite* est totale dans $C([a, b], \mathbb{R})$

La suite des monômes $(x^n)_n$ est totale dans $C([a, b], \mathbb{R})$, mais le Théorème de Müntz et Szasz prouve que, au moins pour $[0, 1]$, il existe des sous-suites de cette suite qui ne sont pas *totales*.

On a le même phénomène pour $[a, b]$ avec les polynômes $\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n$; et la suite $(x^{2n})_n$ n'est évidemment pas totale dans $C([-1, 1], \mathbb{R})$. Pourtant, il existe une suite de polynômes linéairement indépendants telle que, pour tout $[a, b]$, toute sous-suite de cette suite soit totale dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$; faute de référence historique, je baptise une telle suite « *hypertotale* ». Les puristes, me pardonneront ce nom exotique.

Théorème 3 _ La suite de polynômes

$$H_n(x) = 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{x^n}{n^n}$$

est *hypertotale* dans $C([a, b], \mathbb{R})$.

Cela va résulter d'un énoncé valable dans tout espace normé.

Proposition 3 _ Tout espace normé séparable E contient des suites *hypertotales*. Plus précisément, *si* $(e_p)_{p\,\geq\,0}$ est totale dans *E*, avec $\|e_p\| \leq M^p$, et si $(\lambda_n)_{n\,\geq\,0}$ est une suite de nombres tendant vers 0 et vérifiant $\begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_n \neq 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$ alors la suite

$(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = e_0 \\ u_n = e_0 + \lambda_n e_1 + \lambda^2{}_n e_2 + \lambda^3{}_n e_3 + \ldots + \lambda^n{}_n e_n \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$ est

hypertotale dans E, et linéairement indépendante si $(e_p)_{p \geq 0}$ l'est.

La proposition implique le **Théorème** 3, en prenant :

$$\begin{cases} M = max\left(\left|a\right|, b\right), \lambda_0 = 1, \lambda_n = \dfrac{1}{n} \text{ si } n \geq 1 \\ \ldots.. \\ e_p(x) = x^p \end{cases}$$

Ma preuve de la proposition

Je pourrais donner une démonstration très élémentaire, quasi-algébrique. Mais, en voici une plus courte, mais plus « élégante ».

Par le **Théorème** de Hahn-Banach, il suffit, pour montrer qu'une sous-suite

$(u_{n_k})_k$ est totale, de montrer qu'une forme linéaire continue l sur E, nulle sur les u_{n_k}, est identiquement nulle. Soit alors f la fonction analytique dans le disque de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{M}$ du plan complexe, définie par $f(z) = \sum_{p \geq 0} l(e_p) z^p$.

Les relations $l(u_{n_k}) = 0$ se traduisent par les relations $f_{n_k}(\lambda_{n_k}) = 0$, où :

$f_n(z) = \sum_{p=0}^{n} l(e_p)z^p$ est la somme partielle de la série de Taylor de f en 0. Le lemme ci-dessous montre alors que $f \equiv 0$; donc ses coefficients de Taylor $l(e_p)$ sont tous nuls ; il en résulte que l est nulle, puisque la suite $(e_p)_p$ est totale dans E.

Lemme 4 _ Soit $f(z) = \sum_{p \geq 0} c_p z^p$ une série entière de rayon de convergence R > 0, de sommes partielles $f_n(z) = \sum_{p=0}^{n} c_p z^p$, et soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une de nombres non nuls tendant vers 0. Si pour une sous-suite n_k des entiers on a $f_{n_k}(\lambda_{n_k}) = 0$, alors $f \equiv 0$.

Ma preuve du lemme 4

On raisonne par contraposée. Comme $f(0) = 0$, si f n'est pas la fonction nulle on peut écrire pour un entier $m \geq 1$: $f(z) = z^m g(z)$, avec $g(0) \neq 0$, g étant la fonction analytique dont la série de Taylor en 0 est celle de f divisée par z^m.

Donc, si $0 < r < R$, $\dfrac{f_{n_k}(z)}{z^m}$ converge vers $g(z)$ uniformément dans le disque

$D(0, r)$. Mais si on a choisi r assez petit, $|g(z)|$ est supérieur à $\varepsilon > 0$ dans ce disque $D(0, r)$, donc $\left|\dfrac{f_{n_k}(z)}{z^m}\right| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ dans $D(0, r)$ si k est assez grand, et ceci contredit la relation $f_{n_k}(\lambda_{n_k}) = 0$ dès que $\lambda_{n_k} \in D(0, r)$.

Ma Remarque 6 _ Le Théorème 3 (ainsi que la proposition 3 pour un espace complet) a une version plus facile à prouver : la suite des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{n-x}$, pour $n > \max\left(|a|, |b|\right)$, est *hypertotale* dans $C([a, b], \mathbb{R})$. Mais il ne s'agit plus alors de polynômes …

L'intuition de l'intelligible, la soif de comprendre sont inscrites dans l'être humain. J'ajoute qu'il serait absurde, que la théorie, le théorème, le concept, ne veuille être compris, ne veuille communiquer, serait-ce au prix d'un grand labeur, serait-ce à travers le temps et les mutations de conscience...

§ _ Démontrer un théorème, c'est quelque chose de très sensuel qui a un rapport avec le corps. Quand on lit une belle démonstration, quel que soit le domaine mathématique, on entend une musique, on ressent l'harmonie des concepts, la grammaire de la théorie, le rythme. C'est quelque chose qui agit directement au creux du ventre, une sensation extrêmement agréable. Sur un plan plus personnel, cette musique dans l'histoire va rendre cohérent mon rapport au monde et aux autres. Je construis énormément ma vie grâce aux rencontres que je fais dans ce monde des théories mathématiques. Ce sont des amis accueillants qui m'assurent une sorte d'aisance face à l'adversité, des baumes précieux qui me donnent force et confiance.

Partie IV

Nécessité de la condition de Müntz et Szasz

Je vais montrer que si $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$, alors pour tout $q > 0$ différent de tous les λ_k , la fonction $x \longmapsto x^q$ n'est pas adhérente à l'espace vectoriel : $lin\,\{x \longmapsto x^{\lambda_k} \,/\, k \geq 1\}$

Pour cela, il me suffit de montrer que la distance d_n dans l'espace $L^2\,([0, 1], dx)$ de la fonction $x \longmapsto x^q$ à l'espace vectoriel $H_n = lin\,\{x \longmapsto x^{\lambda_k} \,/\, n \geq k \geq 1\}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini (puisque $\|*\|_2 \leq \|*\|_{+\infty}$). L'avantage de cette méthode est que la distance d_n peut se calculer explicitement.

Proposition 4 _ La distance d_n est donnée par

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2q+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{|q - \lambda_k|}{q + \lambda_k + 1} \qquad (11)$$

Il est clair que si $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$, le produit infini converge, quand n tend vers l'infini, vers un nombre non nul, et cela prouve bien le résultat annoncé.

La preuve de la proposition résulte de calculs classiques dans l'espace euclidien. Si $x_1, \dots x_p$ sont p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, notons $G(x_1, \dots x_p)$ le déterminant de Gram de ces vecteurs, c'est-à-dire le déterminant $det\,((\, x_i | x_j\,))_{1 \leq i,\, j \leq p}$, où $(.|.)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. J'utilise alors deux lemmes classiques.

Lemme 5 _ Soient $x, x_1, \dots, x_p$, $p+1$ vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la distance euclidienne d de x au sous-espace $lin\,\{\, x_1, \dots, x_p \,\}$ est donnée par :

$$d = \sqrt{\frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}} \qquad (12)$$

Lemme 6 _ déterminant de Cauchy

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots b_n$ des nombres strictement positifs. Alors on a

$$det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,\, j \leq n} \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{1 \leq j,\, i \leq n} (a_i + b_j)} \qquad (13)$$

Ma preuve de la proposition 4

Dans $L^2([0, 1], dx)$ soit E le sous-espace engendré par les fonctions :

$$\begin{cases} x \longmapsto x^q \\ x \longmapsto x^{\lambda_k},\ n \geq k \geq 1 \end{cases};$$

E est isométrique à $\mathbb{R}^{n+1}$ euclidien (ces fonctions sont indépendantes), et on peut aisément calculer le déterminant de Gramm de ces $n+1$ fonctions et celui des n dernières au moyen des produits scalaires dans $L^2([0, 1], dx)$. On obtient aisément que ces produits scalaires sont de type $\dfrac{1}{q+\lambda_k+1}$ ou $\dfrac{1}{\lambda i + \lambda j + 1}$. Le carré de la distance d_n s'obtient donc, par (12), comme le quotient de deux déterminants de Cauchy. En appliquant alors la formule (13), et après simplification, on obtient exactement (11).

Ma preuve du lemme 5

Si A et B désignent deux convexes de $\mathbb{R}^n$, on note $A + B$ leur somme de Minkowski, c'est-à-dire l'ensemble des $a + b$ quand a décrit A et b décrit B.

Si $u \in \mathbb{R}^n$, on note $[0, u]$ le segment d'origine 0 et extrémité u. Alors la distance euclidienne d de x au sous-espace $lin\ \{x_1, \ldots, x_p\}$ vérifie la relation :

$$vol_{p+1}\left([0, x] + \sum_{i=1}^{p} [0, x_i]\right) = d\ vol_p\left(\sum_{i=1}^{p} [0, x_i]\right) \qquad (14)$$

où vol_k désigne la mesure canonique k- dimensionnelle induite sur les sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$ par la mesure de Lebesgue euclidienne de cet espace (c'est le Théorème de Fubini pour calculer le volume d'un parallélépipède : le produit de la mesure de sa base par sa hauteur !). Reste à calculer $vol_k\left(\sum_{i=1}^{k} [0, x_i]\right)$. C'est justement $\sqrt{G(x_1, \ldots, x_k)}$. Soit en effet $(e_i)_{i \le k}$ une base orthonormale de l'espace $lin\{x_1, \ldots, x_k\}$, et soit A la matrice $k \times k$ telle qu'on ait $(x_1, \ldots, x_k) = (e_1, \ldots, e_k)A$. Alors on a bien sûr :

$$vol_k\left(\sum_{i=1}^{k}[0, x_i]\right) = \left|det(A)\right| = \sqrt{det(A^*)\, det(A)} = \sqrt{det(A^*A)}$$

$$= \sqrt{det((x_i \mid x_j))_{1 \leq i,j \leq k}} = \sqrt{G(x_1, \ldots, x_k)}$$

En insérant cette formule pour $k = p$ et $k = p + 1$ dans (14), on obtient le lemme 5.

Preuve du lemme 6

En soustrayant la dernière ligne du déterminant de toutes les précédentes, et en mettant en facteur $\dfrac{(a_n - a_1)\ \ldots\ (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)\ \ldots\ (a_n + b_n)}$, il reste le déterminant initial dont la dernière ligne a été remplacée par une ligne de 1. En soustrayant, dans ce déterminant, la dernière colonne de toutes les autres, et en mettant en facteur $\dfrac{(b_n - b_1)\ \ldots\ (b_n - b_{n-1})}{(b_n + a_1)\ \ldots\ (a_{n-1} + b_n)}$, il reste cette fois, en développant par rapport à la dernière ligne (formée de $n - 1$ zéros et d'un 1), exactement le déterminant de Cauchy associé aux $2n - 2$ nombres $a_1, \ldots\ a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}$. La formule (13) s'établit aisément par récurrence.

Conclusion (*provisoire* !) : *Faire des Maths, c'est aussi l'art de lire et de relire … lentement, en mettant en évidence l'originalité et l'importance d'une pensée qui fait toute sa place aux singularités, et à tout ce qui semble faire « exception ».*

Et maintenant un dernier *zut* _ *And now a final damn*

Le temps de l'*Analyse Mathématique* m'a toujours paru beau, l'odeur de son jardin entrait par bouffées légères par la fenêtre entrouverte…

Je dis *pôle magnétique*, puisque j'ai eu beau changer, bouger, m'intéresser à l'astrophysique ou à la cosmologie, avancer, reculer, progresser, évoluer, m'écarter, faire la course à pieds, philosopher à mes heures (c'est-à dire *me servir de ma raison pour essayer de penser le monde et ma propre vie, afin de me rapprocher de la sagesse ou du bonheur, voire de former, d'inventer ou de fabriquer des concepts*), écrire pour mes amis et ma famille, m'assagir, rajeunir, m'arrêter, repartir, je n'ai jamais suivi, en somme, que cette fixité passionnée.

J'ai envie de dire que c'est elle qui me vit, me meurt, se sert de moi, me façonne, m'abandonne, me reprend, me roule. Je l'oublie, je me souviens d'elle, j'ai confiance en elle, elle se fraye un chemin à travers moi. Je suis moi quand elle est moi. Elle m'enveloppe, me quitte, me conseille, s'abstient, s'absente, me rejoint. Je suis un poisson dans son eau, un prénom dans son nom multiple. Elle m'a laissé naître, elle saura comment me faire mourir.

Il faut avoir du chaos en *soi* pour enfanter une *étoile* qui danse.

« Là où le danger croît, *croît* aussi ce qui *sauve*. » *À Solal et Hannah*

À Solal et Hannah, la belle affaire d'être une merveille quand on est né *métis* ! Mais vous **comprendrez vite, que tout ce qui est posé comme affirmatif et singulier est sujet à détestation. La beauté, notamment. L'émerveillement aussi, par voie de conséquence.**

Or, les paroles essentielles sont des actions qui se produisent en ces instants décisifs où l'éclair d'une illumination splendide traverse la totalité d'un monde. Il nous faut par conséquent, être nous-mêmes, comme la sagesse nous y invite, justes, gracieux, solaires envers toutes choses et les créer toujours nouvelles telles que nous les avons créées.

À Solal *mon petit cœur*, si tu me demandes pourquoi s'instruire, je te répondrais : *"Mieux vaut avoir des choses à raconter aux filles, c'est encore plus efficace que d'avoir du fric ou des voitures." En effet,* On ne se sauve que par le savoir, investissement bien plus sûr que le compte en banque ! Pour une personne, une classe sociale, une famille ou une nation, l'avenir c'est la société de la connaissance.

À Hannah *mon petit ange*, il faut toujours s'émerveiller. Tout est là : c'est l'unique question. La nature fait miroiter sa splendeur à nos yeux prisonniers. Nous le savons depuis Platon : le temps est l'image mobile de l'éternité. Une splendeur qui reste à connaître me semble être un des plus grands dons que le destin puisse nous offrir en chuchotant à notre oreille : « Je te donne un nouveau cosmos, un nouveau monde. Ouvre les mains, essaie d'y entrer. »

Mes très chers petits, vous devriez par conséquent vous instruire et vous émerveiller sans cesse. S'émerveiller devant les fresques de la chapelle Sixtine de **Michael Ange**, s'émerveiller devant un tableau de **Rembrandt**, de **Léonard de Vinci,** s'émerveiller en écoutant une cantate de **Bach** ou l'andante déchirant du concerto 21 de **Mozart**, s'émerveiller en lisant un poème de **Rimbaud** ou de **Baudelaire**, s'émerveiller en s'imprégnant de la théorie d'**Einstein** ou celle d'**Andrew Wiles**, s'émerveiller dans une formule Mathématique, dans l'effort, dans la découverte, dans l'enthousiasme, dans la création, dans l'amour, dans l'amitié, dans la joie… S'émerveiller et s'instruire, c'est là, l'unique question.

Mes très chers petits, je suis heureux quand j'ai pu en une journée écrire deux démonstrations dont je sois satisfait.
Je suis porté au plus difficile parce que cela me repose, ce qui est facile me fatigue (*rires*). Vous n'imaginez sans doute pas l'énergie que j'ai pu puiser dans vos regards.

Avec les Mathématiques nous inventons des théories qui donnent une organisation abstraite à une multitude de possibilités. Et nous parlons de beauté dans une discussion mathématique, lorsque nos efforts pour créer des structures inédites sont récompensés par la découverte de nouvelles relations cachées, que nous n'avions jamais encore vues, dont nous percevons la symétrie intrinsèque et peut-être le lien nouveau et inattendu qui nous mènera vers une autre branche. Le sens de la création artistique est une qualité commune au compositeur et au mathématicien, renfermant souvent des éléments inattendus, où les moments de frustration et de découragement alternent avec les moments d'émotion intense et de bonheur. C'est le côté palpitant de toute création artistique et scientifique, coexistant en mathématiques avec notre quête d'un ordre rationnel.

Théo Héikay-Universitaire/pdf