Les Transformées de Fourier et les Transformées de Laplace sont deux *grandes propositions rythmées* qui donnent à *penser* de manière nouvelle.

Je n'ai jamais rêvé que d'*Analyse Mathématique*, écrit que d'elle, pensé que sur ou sous elle; je n'ai jamais aimé qu'elle.

Cet exposé a pour ambition (il faut rester modeste), d'examiner les rapports entre le raisonnement mathématique et l'expression conceptuelle, d'en explorer les interpénétrations, ces fusions "qui ne sont jamais totales", mais qui nous conduisent "au cœur du langage et à la créativité de la raison". Concrètement, j'essaie de passer en revue l'histoire de ***quelques*** **intégrales impropres** ***qui s'abandonnent à la*** **Transformation de Laplace, des Transformées de Fourier de Fonctions à Croissance Modérée, en passant par** les *fonctions de Bessel* et ***un lemme de densité.***

Je montrerai par exemple qu'il est possible de calculer les distributions Transformées de Fourier de certaines fonctions à croissance modérée, à partir de la Transformée de Laplace de ces fonctions et je reviendrai plus longuement sur quelques auteurs majeurs.

Sur **Fourier** : l'analyse en amplitude fondée sur les valeurs ponctuelles permet de décomposer un signal en fonction périodiques à support infini; sur **Laurent Schwartz** ("d'une virtuosité stylistique aussi novatrice que sa théorie des distributions") ou sur la théorie des fonctions analytiques, avec "sa structure grammaticale''. L'accelerando des propositions qui s'enchaînent, la synthèse du diagnostic et de la certitude prophétique font que dans cet exposé, poésie et pensée ne font pas seulement que se mouvoir dans l'élément du dire ; en même temps, elles sont redevables de leur dire à de complexes expériences avec la parole qui, pour nous, sont à peine remarquées et à peine moins recueillies. En examinant ainsi la poésie de la pensée, j'essaie de donner une couleur, un rythme, un phrasé, singuliers aux idées, mais aussi d'insuffler à ces lignes _ ne m'en veuillez pas _ un peu de moi, car l'essentiel est de transmettre à la jeune génération des réflexions philosophiques.

Introduction _ Laurent Schwartz, aggravez mon extase, augmentez mon ivresse !
_ *Quel bonheur que d'entendre* ce grand maître *me faire des confidences* ! ...

Tendez l'oreille, écoutez la course de la pensée : en son centre inviolé, vous entendrez que tout d'un coup, deux ou trois objets à très grande distance, auparavant sans aucun lien _ les Transformées de Fourier, les Transformées de Laplace et les Distributions _ font partie de la même famille. Cette manière de penser ou d'opérer dit-on, fait de qui s'y exerce un structuraliste authentique, même si le mot a perdu et son sens originaire et son importance dans les méthodes.

Mon exposé se compose de *deux grandes parties*, bien distinctes et cependant inséparables. Le théâtre des opérations de la ***première partie*** est la **théorie Riemannienne**. On peut, sous des hypothèses très générales, représenter une fonction f définie dans $\mathbb{R}^n$ sous la forme suivante $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, \overline{f}(\xi)d\xi$, où la fonction $\overline{f}$ définie dans $\mathbb{R}^n$ et qui se déduit de f par une formule analogue s'appelle la Transformée de Fourier de f. Il faut voir cette formule de la manière suivante. Elle permet d'écrire une fonction quelconque f comme une « superposition » de fonctions oscillantes simples : les applications $x \longmapsto e^{ix\xi}$, chacune d'elles ayant une amplitude $\left|\overline{f}(\xi)\right|$, et un déphasage arg $\overline{f}(\xi)$. Lorsqu'on veut analyser qualitativement ou quantitativement une fonction, l'idée la plus simple est l'analyse « en amplitude » fondée sur les valeurs ponctuelles : en quels points x la fonction est-elle nulle, « petite », « grande »… ? L'analyse de Fourier permet d'y superposer une analyse « en fréquence » : quelles sont les fréquences ξ qui contribuent à l'écriture de f ci-dessus, y contribuent-elles peu ou beaucoup… ?

Dans ***la deuxième partie*** je me situe dans le cadre de **la théorie des distributions**. C'est une extension de la notion de fonction, qui a joué un rôle très important dans le développement de l'Analyse. Bien que son introduction par **L. Schwartz** soit encore relativement récente, elle a permis de tels progrès en théorie des équations aux dérivées partielles et en analyse harmonique que l'on ne saurait plus parler de ces deux branches sans y avoir recours. Nous verrons par exemple qu'il est possible de calculer les distributions **Transformées de Fourier** de certaines fonctions à croissance modérée, à partir de la **Transformée de Laplace** de ces fonctions. On observera que ce calcul est un *calcul direct*, ne faisant pas intervenir la formule de réciprocité. Pour effectuer ce calcul, je serai amené à utiliser ***la théorie des fonctions analytiques***. La base du calcul consiste néanmoins en une généralisation des résultats de ***la première partie.***

Cela dit, le propos de cette porte entrouverte n'est pas seulement pédagogique. J'ai visé en réalité un autre objectif. Pour l'essentiel, en rédigeant ces lignes, j'avais cherché à rendre les définitions et la grammaire des concepts que je véhicule aussi limpides et intéressantes que possible, sans mettre particulièrement en scène mon propre point de vue sur cette impressionnante galerie de portraits. J'ai cru utile au contraire, dans les pages 39 à 47, d'expliquer de manière explicite la perspective philosophique à partir de laquelle je m'approprie en quelque façon un théorème et plus généralement une théorie. Le leitmotiv de cet exposé a été la nécessité d'être suffisamment attentif dans le maniement des concepts. En quelques mots, une théorie est un tout organisé, un jeu de concepts articulés, et on ne peut considérer l'un d'entre eux sans prendre en compte la façon dont il s'articule avec les autres.

Mais j'ai aussi à l'esprit qu'une bonne lecture n'est jamais à la hauteur de la théorie ou du concept ; elle reste à une certaine distance, dans un périmètre d'inadéquation, qui est lui-même lumineux, comme la couronne qui entoure un soleil obscurci. Cette inadéquation est la garantie de l'expérience de l'« altérité » _ la liberté de se livrer, ou de ne pas se livrer avec nous à un dialogue _ dans le concept, le théorème, ou sa composition musicale.

L'allégresse *est* Savoir _ Rilke

Soyons attentifs aux murmures de ces êtres mathématiques. Nous entendrons qu'il est des cadences, des cordes, des modulations au sein des Transformées de **Fourier** voire de **Laplace**, qui brisent ou qui raccommodent le cœur, ou qui encore le raccommodent dans la rupture. Il est des relations tonales de certaines intégrales qui nous rendent étrangers à nous-mêmes, ou qui au contraire, nous ramènent à nous-mêmes. Il est des équations de **Bessel** qui paraissent ouvrir la prison du moi et nous mettre en harmonie avec la paix océanique de l'être. Il est des distributions (trop nombreux chez **Schwartz**) dans lesquels l'allégresse du savoir est parfaitement authentique et constitue un invincible et ultime bonheur intellectuel.

Cette dimension poétique qui, à mon grand regret, ne convaincra personne, est pourtant du plus grand intérêt. La forme romanesque qui permet de mettre en scène les concepts, cela est possible si l'on prête attentions à ces fulgurances, à ces ouvertures, d'une théorie qui est de l'âme pour l'âme, résumant tout, parfums, sons, couleurs, de la pensée accrochant la pensée et tirant ... Qu'est-ce qui donne le plus de joie ? *That is the question* ! _, c'est à dire le plus de perfection, donc de beauté, donc de vérité.

Aplanir l'espace qui sépare les Transformées de Fourier *des Transformées de Laplace*

Can top-gear thinking be learned? Can it be taught?
La pensée de haut vol s'apprend-elle? S'enseigne-t-elle ?

Intégrale ! je t'ai soûlée dans mes salles de classes ; je t'ai soûlée sans te désaltérer ; _ je t'ai baignée dans les nuits pleines d'étoiles ; je t'ai bercée sur les vagues ; j'ai voulu t'endormir sur les flots… Intégrale ! Intégrale ! que te ferais-je ? que veux-tu donc ? Est-ce que tu ne te lasseras pas de ce chantage qui m'oblige à connaître l'ivresse, qui selon toi : « me fera croire meilleur, plus grand, plus respectable, plus vertueux, plus riche, etc.…. que je ne suis. » ?

Première Partie ou Architecture pentagonale

Partant d'une fonction F*f* , *Calculons* la Transformée de Fourier F*f de f*

I _ *À travers ma paupière, j'accueille* la continuité en 0^+ de la Transformée de Laplace.

Rappelons que la Transformée de Laplace de f : $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ est définie par $[\mathrm{L}f(t)](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. Je me ferai l'avocat du théorème suivant.

Théorème I–1. _ Soit f : $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, localement intégrable, et telle que l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente.

Alors la transformée de Laplace Lf existe pour tout nombre réel $p \in [0, +\infty[$ et définit une fonction continue de la variable p *sur* $[0, +\infty[$.

En particulier, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{p \to 0^+} \mathrm{L}f(p)$.

Proof _ Il suffit de prouver la convergence uniforme de l'intégrale définissant L*f* sur $[0, +\infty[$. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on peut supposer *f* réelle et appliquer la *deuxième formule de la moyenne.*

Pour $0 < u < v$, il existe $c \in [u, v]$ tel que $\int_u^v f(t)e^{-pt}dt = e^{-up}\int_u^c f(t)dt$,

d'où

$$\left|\int_u^v f(t)e^{-pt}dt\right| \leq \left|\int_u^c f(t)dt\right|, \ \forall p \in [0, +\infty[.$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, le membre de droite peut être rendu arbitrairement petit pour u et v au voisinage de 0 ou de $+\infty$, et les étapes successives de cette gravure, nous aide à comprendre le théorème I -1.

II _ *Quelques* intégrales impropres *qui s'abandonnent à la* Transformation de Laplace. Qu'on me permette de donner quelques exemples.

1° À l'appui de mon intuition, je peux proposer une première esquisse qui semble correspondre à ce que je pense. *L'intégrale impropre* $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$,

_ *''un classique''* _ *se veloute délicatement dans l'ombre, s'embrase au soir, paraît plus embaumante qu'ailleurs et souhaiterait qu'on la loue.*

On introduit la Transformée de Laplace $\mathrm{F}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-pt}\, dt.$

F est holomorphe dans le demi-plan complexe $Re\ p > 0$, et par dérivation sous le signe somme, on obtient

$$\mathrm{F}'(p) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-pt}\, dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(p-i)t}dt\right) = \frac{-1}{p^2+1}$$

d'où l'on tire

$$F(p) = -\operatorname{Artan} p + K,$$

et puisque

$$\lim_{p \to 0^+} F(p) = 0, \ F(p) = -\operatorname{Artan} p + \frac{\pi}{2} \ (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

Par application du théorème I-1, on obtient donc $I = \lim_{p \to 0^+} F(p) = \frac{\pi}{2}$.

Remarque _ Ceci est en fait un cas particulier d'un résultat plus général.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ existe, et $Lf(p)$ existe pour $p > 0$.

Alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \lim_{p \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}\,dt \qquad \text{(en vertu du théorème I-1)}$$

Posons

$$G(p) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}\,dt\,;$$

on a

$$G'(p) = -\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\,dt = -Lf(p),$$

d'où

$$G(p) = -\int_p^{+\infty} Lf(u)\,du,$$

car

$$\lim_{p \to +\infty} G(p) = 0.$$

Δ !! _ Si le sens est métaphoriquement « comme un papillotement de présence et d'absence, lire un théorème ressemble plus à tracer ce processus de papillotement constant qu'à compter les perles d'un collier. Je viens, vous l'avez compris de prouver le théorème suivant:

Théorème I-2. _ Soit f : $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, localement intégrable, et telle que :

$$\begin{cases} (\alpha) \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt \ \ est \ \ \underline{convergente} \\ \quad \text{en fusion mathématique} \\ (\beta) \ \ Lf(p) \ \ \underline{existe} \ pour \ \ \mathrm{Re}\, p > 0 \end{cases}.$$

Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} Lf(u)du$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} Lf(u)du.$$

2° _ *La moindre goûte d'eau, fût-ce* une fonction de Bessel, *dès qu'elle mouille ma main, me devient d'une plus précieuse réalité.*

Le théorème I-1 donne des résultats particulièrement intéressants en ce qui concerne les *fonctions de Bessel.*

$$J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}$$

Rappelons d'abord brièvement comment on calcule $L\ J_\nu$ qui existe pour :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, \nu > -1 \\ \mathrm{Re}\, p > 0 \end{cases}.$$

On sait que J_ν est solution de l'*équation de Bessel*

$$\textbf{(E)}\quad t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

Or,

$$\begin{cases} L[t^2f(t)](p) = (Lf)''(p) \\ L[tf'(t)](p) = Lf(p) - p(Lf)'(p) \\ L[t^2f''(t)](p) = 2Lf(p) + 4p(Lf)'(p) + p^2(Lf)''(p) \end{cases}.$$

En transposant dans l'équation de Bessel, il est aisé de voir que LJ_ν vérifie l'équation différentielle : $\textbf{(E')}\ (p^2+1)L'' + 3pL' + (1-\nu^2)L = 0.$

Cette équation s'intègre en posant $p = \operatorname{sh} u$ et $G = \operatorname{ch} u.\,L$. On se ramène alors à $G'' - \nu G = 0$,

d'où

$$\textbf{(1)}\quad LJ_\nu(p) = \frac{A(\nu)\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{\nu} + B(\nu)\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{-\nu}}{\sqrt{p^2+1}}$$

Il reste à calculer $A(\nu)$ et $B(\nu)$. On y parvient en identifiant les deux premiers termes du développement de $F(p)$:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \times \frac{1}{2^{2n+\nu}} \frac{\Gamma(2n+\nu+1)}{p^{2n+\nu+1}}$$

(Car $L(t^{\nu}) = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, voir paragraphe suivant) avec celui obtenu à partir de (1). On obtient $A(\nu) = 0$ et $B(\nu) = 1$,

donc

$$LJ_{\nu}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)^{\nu}} = \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{\nu}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Ceci étant, considérons $\quad \mathbf{I} = \int_0^{+\infty} J_{\nu}(t)dt$.

Cette intégrale converge car $Re\nu > -1$. Ceci est clair pour la borne 0. En $+\infty$, on utilise le développement asymptotique :

$$J_{\nu}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

qui peut d'ailleurs s'obtenir grâce à la Transformation de Laplace. **I** se décompose ainsi en deux intégrales, dont la première converge d'après la règle d'Abel, et dont la seconde est absolument convergente. Le théorème I-1 s'applique alors, et nous obtenons : $\int_0^{+\infty} J_{\nu}(t)dt = \lim_{p\to 0^+} LJ_{\nu}(p) = 1,\ Re\,\nu > -1.$

III _ La Transformation de Fourier d'une fonction f telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi xt}dt$ *existe, et se calcule au gré de la brise.*

Dans ce cas, on peut décomposer $Ff(x)$ sous la forme d'une somme de deux intégrales :

$$Ff(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-2i\pi xt}\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\,dt$$

$$\mathrm{F}f(x) = \int_0^{+\infty} f(-t)e^{2i\pi xt}\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\,dt.$$

Il en résulte alors immédiatement du théorème I-1 que

$$\mathrm{F}f(x) = \lim_{p \to 0^+}\left(\int_0^{+\infty} f(-t)e^{(2i\pi x - p)t}\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(2i\pi x + p)t}\,dt\right).$$

Δ !! _ La genèse du sens du théorème suivant, découle des étapes successives de la sculpture précédente, mise en miroir. Ce qui a du sens ici est rassemblé et sauvegardé de manière dynamique et illuminante par la démonstration rationnelle.

Théorème I-3 _ Si la Transformée de Fourier $\mathrm{F}f$ existe en tant que fonction, on a $\mathrm{F}f(x) = \lim_{p \to 0^+}\left(\mathrm{L}f(p+2i\pi x) + \mathrm{L}f^{-}(p-2i\pi x)\right)$ en désignant par $\mathrm{L}f^{-}$ la Transformée de Laplace de $t \longmapsto f(-t)$.

Exemple _ Soit à calculer la Transformée de Fourier de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t^{\nu-1} \text{ si } t > 0 \\ f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$

Cette Transformée de Fourier existe pour $0 < Re\ \nu < 1$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

Le théorème I-3 s'applique et $\mathrm{F}f(x) = \lim_{p \to 0^+} \mathrm{L}f(p+2i\pi x)$ puisque $f^{-} = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Or, $\mathrm{L}f(p)$ se calcule facilement ; supposons d'abord $p \in]0, +\infty[$:

$$\mathrm{L}f(p) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\nu-1}}{p^{\nu-1}}e^{-u}\frac{du}{p} \quad (u = pt)$$

donc

$$\mathrm{L}f(p) = \frac{\Gamma(\nu)}{p^{\nu}}$$

pour $Re\, p > 0$ par prolongement analytique. Par conséquent,

$$\mathrm{F}f(x) = \lim_{p \to 0^+} \frac{\Gamma(\nu)}{(p + 2i\pi x)^{\nu}}$$

$$\mathrm{F}f(x) = \lim_{p \to 0^+} \Gamma(\nu)e^{-\nu \operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}$$

$$\mathrm{F}f(x) = \lim_{p \to 0^+} \Gamma(\nu)\, e^{-\nu\left(\operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z\right)}$$

avec $z = p + 2i\pi x.$

Lorsque $p \longrightarrow 0^+, \operatorname{Log}|z| \longrightarrow \operatorname{Log}|2\pi x|$

$$\operatorname{Arg} z \longrightarrow \frac{\pi}{2} \operatorname{Sgn} x$$

Où

$$\begin{cases} \operatorname{Sgn} x = 1 \text{ si } x > 0 \\ \operatorname{Sgn} x = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{F}f(x) = \Gamma(\nu)e^{-\nu \operatorname{Log}|2\pi x|}\, e^{-\nu i\pi \operatorname{sgn} x/2}$$

$$\mathrm{F}f(x) = \Gamma(\nu)\frac{e^{-\nu i\pi \operatorname{sgn} x/2}}{|2\pi x|^{\nu}},\quad 0 < Re\, \nu < 1,\ x \neq 0.$$

Δ!! _ Nous ne pouvons qu'accepter pleinement l'accès à l'intelligibilité, à la cohérence (narrative), aux moyens de persuasion, que nous offrent les instruments conceptuels.

IV _ *Un ruissellement tendre pénètre la* Transformée de Fourier de J_n.

La Transformée de Fourier de J_ν existe si ν est un entier n. La fonction J_n étant paire si n est pair, impaire si n est impair, le théorème I-3 fournit immédiatement :

$$\mathrm{F}\,J_n(x) = \lim_{p \to 0^+} \mathrm{L}\,J_n(p + 2i\pi x) + (-1)^n\,\mathrm{L}\,J_n(p - 2i\pi x)$$

d'où

$$\begin{cases} \mathrm{F}\,J_n(x) = 2Re\left[\lim_{p \to 0^+} \mathrm{L}\,J_n(p + 2i\pi x)\right] \text{ si } n \text{ pair} \\ \mathrm{F}\,J_n(x) = 2i\,\mathrm{Im}\left[\lim_{p \to 0^+} \mathrm{L}\,J_n(p + 2i\pi x)\right] \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Mais

$$\mathrm{L}\,J_n(p + 2i\pi x) = \frac{\left[\sqrt{(p + 2i\pi x)^2 + 1} - p - 2i\pi x\right]^n}{\sqrt{(p + 2i\pi x)^2 + 1}}$$

et

$$\sqrt{(p + 2i\pi x)^2 + 1} = e^{[\mathrm{Log}(p + 2i\pi x)^2 + 1]/2} = e^{\mathrm{Log}\,(p^2 - 4\pi^2x^2 + 1 + 4i\pi xp)/2} = e^{\mathrm{Log}\,z/2}$$

Mais lorsque $p \longrightarrow 0^+$, $\mathrm{Log}\,z = \mathrm{Log}\,|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$ tend vers :

$$\begin{cases} *\ \mathrm{Log}(1 - 4\pi^2x^2) \quad \text{si } (1 - 4\pi^2x^2) > 0 \\ *\ \mathrm{Log}(4\pi^2x^2 - 1) + i\pi \quad \text{si } (1 - 4\pi^2x^2) < 0 \end{cases}$$

donc
$$\lim_{p \to 0^+} \sqrt{(p + 2i\pi x)^2 + 1} = \begin{cases} \sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)} & \text{si } (1 - 4\pi^2 x^2) > 0 \\ i\sqrt{(4\pi^2 x^2 - 1)} & \text{si } (1 - 4\pi^2 x^2) < 0 \end{cases}$$

et, par suite,

$$\lim_{p \to 0^+} \mathrm{L\,J}_n(p + 2i\pi x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)} - 2i\pi x\right)^n}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}} & \text{si } (1 - 4\pi^2 x^2) > 0 \\ i^{\,n-1}\dfrac{\left(\sqrt{(4\pi^2 x^2 - 1)} - 2\pi x\right)^n}{\sqrt{(4\pi^2 x^2 - 1)}} & \text{si } (1 - 4\pi^2 x^2) < 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $(1 - 4\pi^2 x^2) > 0$, on obtient une simplification remarquable :

$$\frac{\left(\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)} - 2i\pi x\right)^n}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}} = (-i)^n \frac{\left(2\pi x + i\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}\right)^n}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}}$$

Posons $2\pi x = \cos\theta,\ \theta \in\,]0, \pi]$, alors $\sin\theta = \sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}$

d'où

$$\frac{\left(\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)} - 2i\pi x\right)^n}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}} = \frac{(-i)^n \cos(n \operatorname{Arc}\cos 2\pi x) + i \sin(n \operatorname{Arc}\cos 2\pi x)}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}}$$

On sait que $\cos\,[n \operatorname{Arc}\cos\,(2\pi x)] = P_n(2\pi x)$, où P_n désigne le polynôme de **Tchebicheff** de première espèce.

D'autre part,

$$\sin\,[n \operatorname{Arc}\cos(2\pi x)] = \frac{-\,P_{n+1}(2\pi x) + 2\pi x\, P_n(2\pi x)}{\sqrt{(1-4\pi^2x^2)}}$$

Finalement : $\lim\limits_{p\,\to\,0^+} \mathrm{L}\,J_n(p+2i\pi x)$ = à quelque chose du genre…

$$\begin{cases} (-i)^n\left[\dfrac{P_n(2\pi x)}{\sqrt{(1-4\pi^2x^2)}} + i\,\dfrac{2\pi x\, P_n(2\pi x) - P_{n+1}(2\pi x)}{1-4\pi^2x^2}\right] & \text{si } (1-4\pi^2x^2) > 0 \\ i^n\dfrac{\left(\sqrt{(1-4\pi^2x^2)} - 2\pi x\right)^n}{\sqrt{(1-4\pi^2x^2)}} & \text{si } (1-4\pi^2x^2) < 0 \end{cases}$$

J'achève à présent le calcul de FJ_n en distinguant les cas n pair et n impair.

α) Si n est pair.

Dans l'expression de $\lim\limits_{p\,\to\,0^+} \mathrm{L}\,J_n(p+2i\pi x)$,

on a
$$\begin{cases} (-i)^n = (-1)^{n/2} & \text{quand } (1-4\pi^2x^2) > 0 \\ i^{n-1} = i(-1)^{(n-2)/2} & \text{quand } (1-4\pi^2x^2) < 0 \end{cases}$$

d'où, puisque $FJ_n(x) = 2Re \lim\limits_{p\,\to\,0^+} \mathrm{L}\,J_n(p+2i\pi x)$,

$$FJ_n(x) = \begin{cases} 2\times(-1)^{n/2}\dfrac{P_n(2\pi x)}{\sqrt{(1-4\pi^2x^2)}} & \text{si } |x| < \dfrac{1}{2\pi} \\ 0 \ \text{ si } |x| > \dfrac{1}{2\pi} \end{cases}$$

β) Si n est impair

Dans l'expression de $\lim_{p \to 0^+} \mathrm{L\,J}_n(p + 2i\pi x)$, observons que :

$$\begin{cases} (-i)^n = (-1)^{(n-1)/2} \times (-i) \text{ quand } (1 - 4\pi^2 x^2) > 0 \\ i^{n-1} = (-1)^{(n-1)/2} \text{ quand } (1 - 4\pi^2 x^2) < 0 \end{cases}$$

d'où, puisque $\mathrm{FJ}_n(x) = 2i \,\mathrm{Im}\left(\lim_{p \to 0^+} \mathrm{L\,J}_n(p + 2i\pi x)\right)$,

$$\begin{cases} \mathrm{FJ}_n(x) = 2i(-1)^{(n+1)/2} \dfrac{\mathrm{P}_n(2\pi x)}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}} \text{ si } |x| < \dfrac{1}{2\pi} \\ \mathrm{FJ}_n(x) = 0 \text{ si } |x| > \dfrac{1}{2\pi} \end{cases}$$

Remarque : Ces deux expressions peuvent fusionner en utilisant la fonction « porte » :

$$\prod(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ;$$

$$\mathrm{FJ}_n(x) = 2(-1)^n \frac{\mathrm{P}_n(2\pi x)}{\sqrt{(1 - 4\pi^2 x^2)}} \times \prod(\pi x).$$

Voilà, justement, le point où la question : ***comment vais-je le faire ?*** **touche à la question première :** ***qu'est-ce que je cherche à faire ?***

Δ !! _ J'essaie de mettre en exergue à la fois l'intelligibilité et la vocation (l'acte de réponse). Le jeu et le silence se rapprochent l'un de l'autre. Comme ils le font dans la musique de John Cage. J'essaie de persuader que, en un point fondamental de la chaîne, j'ai ouvert des possibilités de nouveaux reports, que d'une manière ou d'une autre j'ai surmonté ou du moins affaibli les contraintes, la banalité des codes et des alphabets consacrés. Comprendre un théorème, c'est le décoder. Le théorème est un code. *Or tout décodage est un nouvel encodage.* Notre rencontre avec un théorème, nos tentatives pour communiquer avec cette liberté de présence au sein d'un théorème, comporteront toujours une certaine part d'approximation. De même que nos perceptions, nos décryptages, de l'imagination mise en forme. Affirmerai-je et me comprendrez-vous si je dis que c'est là une évidence pour quiconque dispose d'une pratique, même rudimentaire, de la théorie de la mesure et de l'intégrale abtraite.

On ne voit qu'au moyen de concepts – c'est une évidence rarement exprimée

Un sens sans concept permet de réagir immédiatement, pas de comprendre. Et quitte à parler en termes de pouvoir, alors il faut dire que le premier pouvoir que donne la théorie, ce n'est pas un pouvoir sur les autres ou sur le monde, c'est une faculté d'émerveillement.

Si je n'ai pas de concepts pour dire ce que je vois, je ne le vois tout simplement pas. Je ne peux pas m'oublier, je ne peux pas me perdre, je ne peux pas être ébloui, je ne peux pas rendre grâce. Ce n'est pas la maîtrise qui me manque, c'est la réceptivité. Je suis, en quelque sorte, privé d'*impouvoir,* interdit de gratitude…

Deuxième Partie

Joie de cœur, joie de l'esprit, c'est vous plaisirs que je chante.

Qu'en est-il des Transformées de Fourier de Fonctions à Croissance Modérée ?

I _ *Il n'est rien, que je sache, de plus substantiel* _ *Comprendre, c'est tenter de fabriquer de l'intime avec du conventionnel.* Quelques notations qui donnent du sens à mon propos.

Je note $D(\mathbb{R})$ l'ensemble des onctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, indéfiniment dérivables à support compact. $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, indéfiniment dérivables, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivée, c'est-à-dire $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^k \varphi^{(l)}(x) = 0$

pour tous $k, l \in \mathbb{N}$.

On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, localement intégrable, est à *croissance modéré* si, considérée comme distribution, elle est tempérée, ou encore $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ existe, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$.

II _ ***Loin de prétendre à l'immatériel,* F*f* *se calcule à partir de* L*f*.**

Théorème II-1 _ *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, *à croissance modérée. Alors l'abscisse de convergence de* L*f est* 0, *et on a*

$$\mathrm{F}f = \lim_{p \to 0^+} \{\mathrm{L}f(p + 2i\pi x) + \mathrm{L}f^{-}(p - 2i\pi x)\}$$

au sens des distributions, ie., $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$< \mathrm{F}f, \varphi> = \lim_{p \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f^{-}(p - 2i\pi x)\,\varphi(x)dx\right)$$

Le théorème **I-3** se généralise immédiatement en prenant la limite au sens des distributions.

Proof _ Il est clair que l'abscisse de convergence de $\mathrm{L}f$ est 0, car $\forall p > 0$, e^{-pt} est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées en $+\infty$.

Pour la deuxième partie du théorème, soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

Posons

$$\mathrm{T}(\varphi) = \lim_{p \to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f(p+2i\pi x)\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f^-(p-2i\pi x)\,\varphi(x)dx\right)$$

$$= \lim_{p \to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-(p+2i\pi x)}dtdx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) +$$

$$+\int_0^{+\infty} f(-t)e^{-(p-2i\pi x)}dtdx$$

Le théorème de **Fubini** s'applique car $\left|\varphi(x)f(t)\,e^{-(p+2i\pi x)}\right| \leq \left|\varphi(x)\right|\left|f(t)\right|e^{-pt}$,

donc

$\mathrm{T}(\varphi) = \lim_{p \to 0^+}$ (de quelque chose du genre) …. et ce quelque chose est définit par :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-2i\pi xt}\,dxdt + \int_0^{+\infty} f(-t)\,e^{-pt}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{2i\pi x}dtdx\right)$$

$$\mathrm{T}(\varphi) = \lim_{p \to 0^+}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\mathrm{F}\,\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} f(-t)\,e^{-pt}\mathrm{F}\varphi(-t)dt\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{F}\,\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} f(-t)\,\mathrm{F}\varphi(-t)dt$$

En vertu du théorème I-1

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, F\,\varphi(t)dt \;=\; \langle f, F\varphi\rangle = \langle Ff,\ \varphi\rangle$$

Quod erat demonstrandum, as Latinists like to say.

Exemple _ Calculons de manière élémentaire, à partir de ce théorème, F1.

On a
$$\begin{cases} L1 = \dfrac{1}{p} \\ L1^{-} = \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

donc,
$$\langle F1, \varphi\rangle = \lim_{p\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+2i\pi x} + \frac{1}{p-2i\pi x}\right)\varphi(x)dx$$

$$= \lim_{p\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2p}{p^2+4\pi^2x^2}\,\varphi(x)dx$$

$$= \lim_{p\to 0^+} \frac{2}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{1+\dfrac{4\pi^2x^2}{p^2}}\,dx$$

Posons

$$\frac{2\pi x}{p} = \operatorname{tang} u \Leftrightarrow u = \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\pi x}{p}:$$

$$\langle F1, \varphi\rangle = \lim_{p\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\left(\frac{p}{2\pi}\operatorname{tg} u\right)du.$$

Lorsque $p \longrightarrow 0^+$, $\varphi\left(\dfrac{p}{2\pi}\operatorname{tg} u\right) \longrightarrow \varphi(0)$ simplement sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$<F1, \varphi> \ = \ \varphi(0) = <\delta, \varphi>,$$

d'où

$$F1 = \delta.$$

Ne voyons-nous pas que si la théorie et l'abstraction réglaient nos lieux habituels, nos calculs les prolongent à certains égards ?

Pour intéressant qu'il soit, un calcul élémentaire de ce type sera impossible dans la plupart des cas. Il sera indispensable d'utiliser la théorie des fonctions de variable complexe, à partir d'un lemme de densité que je vais établir.

Δ !! Chacune de ces aires de définition et de connotation est pertinente…. Chaque unité de la chaîne associative entre en relation linéaire et horizontale avec la suivante.

III _ *Un lemme de densité cramponne mon esprit à la rampe de la logique.*

Lemme II – 1 _ Soit $D(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions entières à décroissante rapide ainsi que toutes leurs dérivées dans toute bande horizontale de $\mathbb{C}$; plus précisément $f \in D(\mathbb{C})$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} (\alpha) \ f \text{ est entière sur } \mathbb{C} \\ \& \\ (\beta) \ \displaystyle\lim_{|z| \to +\infty,\, -\alpha \le \operatorname{Im} z \le \alpha} z^m f^{(k)}(z) = 0, \ \forall k, m \in \mathbb{N}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*_+ \end{cases}$$

Soit $H(\mathbb{R})$ l'ensemble des restrictions à $\mathbb{R}$ des éléments de $H(\mathbb{C})$.

Alors $H(\mathbb{R}) \subset \overline{S}(\mathbb{R})$, et $H(\mathbb{R})$ est dense dans $S(\mathbb{R})$ pour la topologie de $S(\mathbb{R})$.

Proof _ On sait que $D(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{S}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathrm{S}(\mathbb{R})$ et soit $\overline{\varphi} = \mathrm{F}\varphi$. Alors

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(x)\, e^{2i\pi tx}\, dx = \overline{\mathrm{F}}\, \overline{\varphi}(t)$.

Puisque $D(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{S}(\mathbb{R})$, il existe une suite $\overline{\Psi}_n \in D(\mathbb{R})$ telle que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \overline{\Psi}_n = \overline{\varphi}$ dans $\mathrm{S}(\mathbb{R})$.

Soit $\Psi_n = \overline{\mathrm{F}}\, \overline{\Psi}_n$, la Transformée de Fourier étant *bicontinue* de $\mathrm{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{S}(\mathbb{R})$, on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} \Psi_n = \varphi$ dans $\mathrm{S}(\mathbb{R})$. Il reste à montrer que $\Psi_n \in \overline{\mathrm{S}}(\mathbb{R})$.

Or, on a

$$\Psi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Psi}_n(x)\, e^{2i\pi tx}\, dx = \int_{a_n}^{b_n} \overline{\Psi}_n(x)\, e^{2i\pi tx}\, dx$$

si $\operatorname{supp} \overline{\Psi}_n \subset [a_n, b_n]$.

Posons $\quad \Psi_n(z) = \int_{a_n}^{b_n} \overline{\Psi}_n(x)\, e^{2i\pi zx}\, dx.$

Il est évident que Ψ_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et

$$\Psi^{(k)}_n(z) = \int_{a_n}^{b_n} (2i\pi x)^k\, \overline{\Psi}_n(x)\, e^{2i\pi zx}\, dx.$$

Ceci prouve d'abord que Ψ_n est *analytique* sur $\mathbb{C}$; en effet, en supposant z *réel,*

$\left|\Psi^{(k)}{}_n(z)\right| \;\leq\; (2\pi M)^k \times \| \overline{\Psi}_n \|_1$ où $M = \mathrm{Max}\left(|a_n|, |b_n|\right)$, donc la série de Mac Laurin de Ψ_n converge pour tout z réel, donc son rayon de convergence est infini et Ψ_n est développable en série entière.

On a en outre

$$z^m \Psi^{(k)}{}_n(z) = \int_{a_n}^{b_n} (2i\pi x)^k \, z^m \, \overline{\Psi}_n(x) \, e^{2i\pi z x} \, dx$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \left[(2i\pi x)^k \, \overline{\Psi}_n(x)\right]^{(m+1)} \frac{e^{2i\pi z x}}{z} \, dx.$$

(On intègre $m + 1$ fois par parties, en tenant compte du fait que $\overline{\Psi}_n$ et toutes ses dérivées s'annulent en a_n et b_n.)

Pour $-\alpha \leq \mathrm{Im}\, z \leq \alpha$, on a donc

$$\left|z^m \Psi^{(k)}{}_n(z)\right| \leq \frac{1}{|z|} \times 2\pi^k \times \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{Max}\left\{ \left| \left[x^k \, \overline{\Psi}_n(x)\right]^{(m+1)} \right| , x \in [a_n, b_n] \right\} e^{2\pi \alpha x} \, dx.$$

Et ceci tend vers 0 lorsque $|z| \longrightarrow +\infty$.

***Quod erat demonstrandum*, as Latinists like to say.**

L'intérêt pratique de ce lemme est évident pour calculer $<Tf, \varphi>$, il suffira de prendre $\varphi \in \overline{S}(\mathbb{R})$ au lieu de $\varphi \in S(\mathbb{R})$, ce qui permettra d'utiliser les intégrales de variable complexe. Voyons tout de suite un exemple important.

IV _ *À quoi reconnais-tu le fruit de ta connaissance ? Essayons de mettre la main sur la signification en évaluant un* ***cas très singulier****. En lisant ce lemme, sa signification en est toujours comme suspendue, c'est quelque chose de remis à plus tard, qui doit encore venir….*

Théorème II-2 _ Soit f à croissance modérée, telle que $Lf(p)$ se prolonge analytiquement sur un domaine $Re\ p > \alpha$ $(\alpha < 0)$, avec un certain nombre de pôles simples $i\alpha_1, i\alpha_2, \ldots, i\alpha_n$ sur l'axe des imaginaires purs.

Alors, $\forall \varphi \in \overline{S}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} Lf(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx = \vartheta$, avec

$$\vartheta = \langle V_p\,(Lf(2i\pi x)), \varphi\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \text{Rés}(Lf(p),\ i\alpha_j) \times \varphi\left(\frac{\alpha_j}{2\pi}\right).$$

Proof _

$\int_{-\infty}^{+\infty} Lf(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx = \int_{\Gamma} Lf(p + 2i\pi z)\varphi(z)dz$ où (Γ) désigne le chemin infini savant le plan complexe, dont je laisse le soin au lecteur de construire.

(Les pôles de $Lf(p + 2i\pi z)$ sont *au-dessus* de l'axe des réels :

$$p + 2i\pi z = i\alpha_j \Leftrightarrow z = \frac{\alpha_j}{2\pi} + i\frac{p}{2\pi} \text{ et } p > 0.)$$

Donc $\forall r > 0$ assez petit, fixé pour l'instant,

$\int_{-\infty}^{+\infty} Lf(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx = C_r$ avec

$$C_r = \int_{-\infty}^{-r+\alpha_1/2\pi} Lf(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx + \int_{r+\alpha_1/2\pi}^{-r+\alpha_2/2\pi} Lf(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{\alpha_n/2\pi + r}^{+\infty} \mathrm{L}f(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{(\gamma_j)} \mathrm{L}f(p + 2i\pi z)\,\varphi(z)dz.$$

(où les (γ_j) sont les petits demi-cercles de rayon r, orientés dans le sens trigonométrique).

Donc, $\lim_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f(p + 2i\pi x)\varphi(x)dx = \vartheta$, avec

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{-r+\alpha_1/2\pi} \mathrm{L}f(2i\pi x)\varphi(x)dx + \ldots + \int_{r+\alpha_r/2\pi}^{+\infty} \mathrm{L}f(2i\pi x)\,\varphi(x)dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{(\gamma_j)} \mathrm{L}f(2i\pi z)\,\varphi(z)dz)$$

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{-r+\alpha_1/2\pi} \mathrm{L}f(2i\pi x)\varphi(x)dx + \ldots + \int_{r+\alpha_r/2\pi}^{+\infty} \mathrm{L}f(2i\pi x)\,\varphi(x)dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{\theta=\pi}^{0} \mathrm{L}f(i\alpha_j + 2i\pi re^{i\theta}) \times \varphi\left(\frac{\alpha_j}{2\pi} + re^{i\theta}\right) i\,re^{i\theta}d\theta.$$

Δ !! _ C'est sur ce carrefour qu'il est loisible de constater le changement de fréquence, de densité et d'écho_ d'une limite_ en faisant tendre r vers 0 …

$$\begin{cases} (\alpha)\ \text{la somme d'intégrales tend vers} < \mathrm{V}_p\,(\mathrm{L}f(2i\pi x)), \varphi > \\ (\beta)\ \mathrm{L}f(i\alpha_j + 2i\pi re^{i\theta})\,i\,re^{i\theta}\ \text{tend vers}\ \dfrac{1}{2\pi}\ \text{Rés}\,(\mathrm{L}f(p),\ i\alpha_j) \\ (\delta)\ \varphi\left(\dfrac{\alpha_j}{2\pi} + re^{i\theta}\right)\ \text{tend vers}\ \varphi\left(\dfrac{\alpha_j}{2\pi}\right) \end{cases}$$

Δ !! _ C'est par l'intermédiaire de la grammaire, au sens plein du terme, que le sens se fait jour dans la lumière du théorème **II-2,** enfin démontré.

En changeant x en $-x$, je peux déduire immédiatement le :

Théorème II-3 _ *Soit f à croissance modérée sur* $\mathbb{R}$, telle que $\mathrm{L}\bar{f}\,(p)$ *se prolonge analytiquement sur un domaine* $\mathrm{Re}\; p > \beta$ $(\beta < 0)$, *avec un certain nombre de pôles simples* $i\,\beta_1, i\,\beta_2, \ldots, i\,\beta_k$ *sur l'axe des imaginaires purs.*

Alors, $\forall \varphi \in \overline{\mathrm{S}}\,(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}\bar{f}\,(p - 2i\pi x)\, \varphi(x) dx = \zeta$, avec

$$\zeta = \left\langle \mathrm{V}_p \left[\mathrm{L}\bar{f}\,(-2i\pi x)\right],\ \varphi \right\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} \mathrm{Rés}\left[\mathrm{L}\bar{f}\,(p),\ i\,\beta_j\right] \varphi\left(-\frac{\beta_j}{2\pi}\right).$$

***Exemple* 1** _

Soit $\mathrm{U}(t)$ la fonction échelon-unité de Heaviside : $\mathrm{U}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$

Alors, $\forall \varphi \in \overline{\mathrm{S}}\,(\mathbb{R})$, $\langle \mathrm{FU}, \varphi \rangle = \lim\limits_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{LU}(p + 2i\pi x) \varphi(x)\, dx$.

Mais $\mathrm{LU}(p) = \dfrac{1}{p}$ et le théorème **II-2** s'applique :

$$\langle \mathrm{FU}, \varphi \rangle = \left\langle \mathrm{V}_p \frac{1}{2i\pi x},\ \varphi \right\rangle + \frac{1}{2} \mathrm{Rés}(\mathrm{LU}(p), 0) \times \varphi(0)$$

$$\langle \mathrm{FU}, \varphi \rangle = \frac{1}{2i\pi} \left\langle \mathrm{V}_p \frac{1}{x},\ \varphi \right\rangle + \frac{1}{2} \varphi(0),$$

d'où $$\mathrm{FU} = \frac{1}{2i\pi} \mathrm{V}_p \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\delta.$$

***Exemple* 2** _ $f(t) = e^{i\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\begin{cases} \mathrm{L}f(t) = \dfrac{1}{p - i\alpha} \\ \mathrm{L}f^{-}(t) = \dfrac{1}{p + i\alpha} \end{cases}$,

d'où, en utilisant les théorèmes **II-1**, **II-2** et **II-3**,

$$<\mathrm{F}f, \varphi> = \lim_{p \to 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f(p + 2i\pi x)\varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{L}f^{-}(p - 2i\pi x)\varphi(x)\, dx \right\}$$

$$<\mathrm{F}f, \varphi> = < \mathrm{V}_p \frac{1}{i(2\pi x - \alpha)}, \varphi> + \frac{1}{2} \times 1 \times \varphi\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) +$$
$$+ < \mathrm{V}_p \frac{1}{i(-2\pi x + \alpha)}, \varphi> + \frac{1}{2} \times \varphi\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right).$$

Les V_p s'éliminent, et on obtient $\mathrm{F}f = \delta_{\alpha/2\pi}$. Pour $\alpha = 0$, on trouve le résultat du paragraphe 2.

J'espère que vous êtes sensibles à l'harmonie quasi chorale, de ces exemples. Tendez-l'oreille, et vous entendrez que *tout conspire, s'entrecroise et interagit, intercepte et s'entr'exprime, congrue et consent, au cœur inviolé de la théorie.*

L'analyse est possible. Essayons d'en démêler les fils principaux : la politesse de la rigueur, voilà ce que j'ai tenté d'écrire.

Δ !! _ Répétons-le, les Mathématiques et la logique mathématique peuvent s'accommoder de leurs jeux purs et élégants, même si elles savent _ depuis **Gödel** _ qu'on ne peut jamais démontrer qu'un système axiomatique est pleinement cohérent à l'intérieur même de ses propres règles et postulats.

Car tout système conceptuel inclut nécessairement des questions auxquelles on ne peut répondre qu'à l'extérieur de ce système. Il en résulte la nécessité de se référer à un méta-système pour considérer un système.

Cela signifie qu'il y a une possibilité de « dépasser » une incertitude ou une contradiction en constituant un méta-système.

La perte de la certitude est en même temps l'invitation au méta-point de vue. L''acquisition de la relativité n'est pas la chute dans le relativisme. Toute découverte d'une limite à la connaissance est en elle-même un progrès de connaissance. Toute introduction de la contradiction et de l'incertitude peut se transformer en gain de complexité ; c'est dans ce sens que la limitation apportée par la physique quantique à la connaissance déterministe/mécaniste se transforme en un élargissement complexificateur de la connaissance, et prend un sens pleinement épistémologique.

V _ La Transformée de Fourier *d'une fonction périodique* s'imprime sur du sable aride, comme la trace du pied nu, mon poème ingénu n'éludant pas la rime.

Soit f périodique de période T, $f \in L^1([0, T])$. On sait que

$$\begin{cases} Lf(p) = \dfrac{1}{1 - e^{-pT}} \displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-pt} dt \\ Lf^-(p) = \dfrac{1}{1 - e^{-pT}} \displaystyle\int_0^T f(-t)\, e^{-pt} dt \end{cases}$$

Donc Lf et Lf^- se prolongent analytiquement dans tout le plan complexe, sauf aux pôles simples $z_k = \dfrac{2ik\pi}{T} = \omega ik$.

On a : $\text{Rés}\left[Lf(p),\ z_k\right] = \left[\dfrac{1}{Te^{pT}} \displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-pt} dt\right]_{p = \omega ik} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt = c_k$

en désignant par c_k le coefficient de $e^{ik\omega t}$ dans le développement de f en série de Fourier (qui ne converge pas nécessairement p.p. vers $f(x)$ si $f \in L^1[0, T]$).

De même $\text{Rés}\left[Lf^-(p),\ z_k\right] = c_{-k}$.

Les théorèmes **II-2** et **II-3** s'appliquent sans difficulté dans le cas d'une répartition périodique des pôles simples sur l'axe des imaginaires.

On obtient ainsi :

$$\mathrm{F}f = \mathrm{V}_p\,[\mathrm{L}f(2i\pi x)] + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Rés}\left[\mathrm{L}f(p),\ z_k\right]\delta_{\,z_k/2\pi} +$$

$$+\ \mathrm{V}_p[\mathrm{L}f(-2i\pi x)] + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Rés}\left[\mathrm{L}f^-(p)\,,\, z_k\right]\delta_{\,-z_k/2\pi}$$

$$\mathrm{F}f = \mathrm{V}_p\left(\frac{1}{1-e^{-2i\pi x\mathrm{T}}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,dt\right) +$$

$$+\ \mathrm{V}_p\left(\frac{1}{1-e^{2i\pi x\mathrm{T}}}\int_0^{\mathrm{T}} f(-t)e^{2i\pi xt}\,dt\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\,\delta_{k/\mathrm{T}}$$

Or les V_p s'éliminent; considérons en effet la deuxième.

$$\mathrm{V}_p\left(\frac{1}{1-e^{2i\pi x\mathrm{T}}}\int_0^{\mathrm{T}} f(-t)e^{2i\pi xt}\,dt\right) =$$

$$= \mathrm{V}_p\left(\frac{-e^{-2i\pi xt}}{1-e^{-2i\pi x\mathrm{T}}}\int_0^{\mathrm{T}} f(-t)e^{2i\pi xt}\,dt\right)$$

$$= \mathrm{V}_p\left(\frac{-1}{1-e^{-2i\pi x\mathrm{T}}}\int_0^{\mathrm{T}} f(-t)\,e^{2i\pi x(t-\mathrm{T})}dt\right)$$

$$= \mathrm{V}_p\left(\frac{-1}{1-e^{-2i\pi x\mathrm{T}}}\int_{\mathrm{T}}^{0} f(u-\mathrm{T})e^{-2i\pi x}\,(-du)\right)\ (u = \mathrm{T}-t)$$

$$= \mathrm{V}_p\left(\frac{-1}{1-e^{-2i\pi x\mathrm{T}}}\int_0^{\mathrm{T}} f(u)\,e^{-2i\pi xu}du\right)\ \text{car}\ f(u-\mathrm{T}) = f(u).$$

Δ !! _ Le processus de persuasion de chaque forme de théorie se fonde sur sa grammaire propre ; il va sans dire mais mieux en le disant que le théorème suivant n'est pas un vide spectral. De plus, et cela est d'une importance capitale, nous sommes invités à dénuder sa présence, à la disséquer dans le cadre d'une rhétorique. La rhétorique est l'art de charger d'effets de signification les unités lexicales et grammaticales de tout acte de communication.

Théorème II-4 _ Soit $f \in L^1([0, T])$, *périodique de période* T. Sa Transformée de Fourier est le peigne de **Dirac** obtenu en remplaçant, dans le développement en série de Fourier de f, les termes $e\ ik\omega t$ par $\delta_{k/T}\left(\omega = \dfrac{2\pi}{T}\right)$:

$$Ff = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta_{k/T}\ ,\quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{ik\omega t}\, dt$$

Δ !! _ Je disais plus haut que toute lecture d'un concept est une perpétuelle réinvention, mais je pourrais aussi dire que toutes les lectures sont erronées. Mais c'est précisément cela qui les rend créatrices.

VI _ *Ivre d'insouciance, sur des flots cadencés,* la Transformée de Fourier *de* $f(t) = U(t) \times \mathrm{Log}\, t$ se balance.

L'étude préliminaire d'une distribution intervenant dans certains développements asymptotiques sera nécessaire.

1° *La distribution* A_s *rit de ses premières fleurs.*

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, localement intégrable, dérivable en 0, telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

On cherche un développement asymptotique en 0 de $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$. Pour cela, j'introduis $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)-f(0)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Alors,

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\,\mathrm{F}'(x) - \frac{f(0)}{x},\ \forall x > 0,$$

donc

$$\mathrm{F}(x) = -\,\mathrm{G}(x) - f(0) \times \mathrm{Log}\, x + \mathrm{C},\ \forall x > 0.$$

Je peux obtenir C en posant $x = 1$: $\mathrm{C} = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt.$

J'introduis la quantité

$$< \mathrm{A}_s, f > = \int_0^1 \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Il est claire que A_s définit une *distribution tempérée* ; en fait A_s opère sur l'espace des fonctions localement intégrables, dérivables en 0 et telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Pour toute fonction de ce type, on a donc

$$\mathrm{F}(x) = < \mathrm{A}_s, f > - f(0) \times \mathrm{Log}\, x - \int_0^x \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt,$$

c'est-à-dire le développement suivant au voisinage de 0:

$$F(x) = -f(0) \times \operatorname{Log} x + \langle A_{s'}\ f \rangle + O(x).$$

Remarque 1. _ $\langle A_{s'}\ f \rangle$ peut se calculer dans certains cas grâce à la transformation de Laplace, car

$$L\left(\int_t^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du\right) = \frac{1}{p}\int_0^p Lf(v)dv$$

On obtient ainsi par exemple, pour $f(t) = \cos t$,

$$L\left(\int_t^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du\right) = \frac{1}{p}\int_0^p \frac{v}{1+v^2}dv = \frac{1}{2p}\operatorname{Log}(1+p^2),$$

d'où, $L[Ci(t)](p) = \dfrac{\operatorname{Log} p}{p} + \dfrac{1}{2p}\operatorname{Log}\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)$ (γ constante d'Euler)

$$= \frac{\operatorname{Log} p + \gamma}{p} - \frac{\gamma}{p} + \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{kp^{2k}}$$

En inversant cette relation, on obtient, en tenant compte du fait que

$$L^{-1}\left(\frac{\operatorname{Log} p + \gamma}{p}\right) = -\operatorname{Log} t \ \ (\textit{voir paragraphe suivant}),$$

$$Ci(t) = -\operatorname{Log} t - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k(2k)!}t^{2k}$$

ce qui prouve que $\langle A_{s'}\ \cos t \rangle = -\gamma$

***Remarque* 2** _ En faisant opérer A_s sur la partie paire de f, on obtient la distribution $\mathrm{A}_s\mathrm{P}$

$$< \mathrm{A}_s\mathrm{P}, f > = < \mathrm{A}_s, \frac{f + f^-}{2} >.$$

Δ !! _ J'essaie de rendre manifestes les ruses, les déplacements entre signes et vacuité inhérents dans mon propre jeu et dans le langage avec lequel, seul, le jeu peut se jouer… Mais, j'ai aussi à l'esprit qu'il me manque un juge privilégié, d'interprète qui puisse déterminer et communiquer la vérité, les intentions véritables contenus dans le matériau.

2° *Mon âme, qu'avez-vous vu de plus beau ce jour-là sur le sable ? Ce fut* la Transformée de Fourier *de* $f(t)$ = U(t)Log t _ *Je sais tel soir où chaque intégrale, une à une, me paru particulièrement belle.*

Je vais montrer dans un premier temps comment calculer Lf. Partant de :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \Rightarrow \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Log}\, t.\, t^{z-1} e^{-t} dt$$

Or,

$$\Gamma'(1) = -\gamma,$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Log}\, t.\, e^{-t} dt = -\gamma.$$

Pour $p \in \mathbb{R}^*_+$, je pose $t = pu$, et j'obtiens

$$\int_0^{+\infty} (\mathrm{Log}\, u + \mathrm{Log}\, p) e^{-pu}.p du = -\gamma$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{Log} u.\, e^{-pu} du + \int_0^{+\infty} \operatorname{Log} p.\, e^{-pu}.p\, du = -\frac{\gamma}{p}$$

et, par suite,

$$\mathrm{L}(\operatorname{Log} t)(p) = -\frac{\operatorname{Log} p + \gamma}{p}.$$

Je calcul dans un deuxième temps F*f*.

En vertu du théorème **II-1**,

$$< \mathrm{F}f, \varphi > = \lim_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x) + \gamma}{p + 2i\pi x} \varphi(x)\, dx$$

$$< \mathrm{F}f, \varphi > = \lim_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x} \varphi(x)\, dx - \frac{\gamma}{2i\pi} < \mathrm{V}_p \frac{1}{x}, \varphi > - \frac{\gamma}{2} \varphi(0)$$

(exemple 1, paragraphe IV, deuxième partie).

Il me reste à calculer

$$\lim_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x} \varphi(x)\, dx.$$

Le théorème II-2 ne s'applique pas ici, mais la méthode de démonstration peut s'utiliser avec quelques modifications.

Je suppose, $\varphi \in \overline{S}\,(\mathbb{R})$, dès lors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x}\,\varphi(x)\,dx = \int_{(\Gamma)} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi z)}{p + 2i\pi z}\,\varphi(z)\,dz$$

où (Γ) représente le chemin infini du plan complexe que tout lecteur consciencieux peut dessiner.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x}\,\varphi(x)\,dx = \mathcal{D},\ \textit{avec}$$

$$\mathcal{D} = \int_{-\infty}^{-r/2\pi} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x}\,\varphi(x)\,dx + \int_{r/2\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x}\,\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \int_{(\gamma)} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi z)}{p + 2i\pi z}\,\varphi(z)\,dz$$

d'où

$$\Lambda = \lim_{p \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(p + 2i\pi x)}{p + 2i\pi x}\,\varphi(x)\,dx$$

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{-r/2\pi} \frac{\operatorname{Log}|2\pi x| - i\frac{\pi}{2}}{2i\pi x}\,\varphi(x)dx + \int_{r/2\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}|2\pi x| + i\frac{\pi}{2}}{2i\pi x}\,\varphi(x)dx +$$

$$+ \int_{(\gamma)} \frac{\operatorname{Log}(2i\pi z)}{2i\pi z}\,\varphi(z)\,dz$$

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{-r/2\pi} \frac{\operatorname{Log}|2\pi x|}{2i\pi x}\varphi(x)\,dx + \int_{r/2\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}|2\pi x|}{2i\pi x}\varphi(x)\,dx -$$

$$- i\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{-r/2\pi} \frac{1}{2i\pi x}\varphi(x)\,dx + i\frac{\pi}{2}\int_{r/2\pi}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi x}\varphi(x)dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{Log}(ire^{i\theta})}{ire^{i\theta}} \times \frac{r}{2\pi} ie^{i\theta}\varphi\left(\frac{re^{i\theta}}{2\pi}\right)d\theta.$$

En changeant x en $-x$ dans la troisième intégrale :

$$\Lambda = + \int_{-\infty}^{-r/2\pi} \frac{\operatorname{Log}|2\pi x|}{2i\pi x}\varphi(x)\,dx + \int_{r/2\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}|2\pi x|}{2i\pi x}\varphi(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r/2\pi}^{+\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2x}dx + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\left(\operatorname{Log} r + \theta + \frac{\pi}{2}\right)\varphi\left(\frac{re^{i\theta}}{2\pi}\right)d\theta$$

C'est à ce stade qu'il est jouissif de distinguer le poids, les rugosités, la portée, les connotations des deux premières intégrales en faisant tendre r vers 0.

Celles – ci fournissent : $\frac{1}{2i\pi} < V_p \frac{\operatorname{Log}|2\pi x|}{x}, \varphi >.$

La troisième intégrale donne d'après mes calculs, et compte tenu de VI-1:

$$\frac{1}{2} < A_s P, \varphi > - \frac{1}{2}\varphi(0) \times \operatorname{Log}\frac{r}{2\pi} + O(r).$$

La quatrième intégrale vaut

$$\operatorname{Log}\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\varphi\left(\frac{re^{i\theta}}{2\pi}\right)d\theta+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\varphi\left(\frac{re^{i\theta}}{2\pi}\right)d\theta=\frac{\operatorname{Log} r}{2}\varphi(0)+O(r),$$

en utilisant le fait que φ est dérivable en 0 pour la première intégrale, et le fait que

$\int_{-\pi}^{0}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)d\theta = 0$ pour la deuxième intégrale.

Il en résulte que : $\Lambda = \frac{1}{2i\pi} < V_p\frac{\operatorname{Log}|2\pi x|}{x}, \varphi > + \frac{1}{2} < A_sP, \varphi > + \frac{1}{2}\varphi(0)\operatorname{Log} 2\pi,$

et finalement,

$$F(\operatorname{Log} tU(t)) = -\frac{1}{2i\pi}V_p\frac{\operatorname{Log}|2\pi x| + \gamma}{x} - \frac{1}{2}(\operatorname{Log} 2\pi + \gamma)\delta - \frac{1}{2}A_sP.$$

C'est ici que s'achève la description du nœud et l'élucidation du dénouement de la tragédie globale.

P.S. _ Il est évident que si on connaît toutes les « ficelles du métier » qui permettent de traiter rapidement les limites, on dispose d'un outil de calcul puissant.

Δ !! En gros la traduction des concepts, m'en servir comme un joueur de tennis se sert d'un mur qui renvoie toutes balles, les mettre en scène, les faire évoluer à l'aire libre, dans la vie de tous les jours, plutôt que d'essayer de les expliquer d'une façon lourdement didactique, a pour moi toujours été présente, je l'ai toujours eue avec moi comme répertoire…. À cause de la clarté, à cause de la beauté, oui. Je n'ai jamais cessé de chercher la beauté. Souvent le beau est l'éclat du vrai, presque son test. Le style est le signe de l'invention, du passage par un paysage neuf.

And now a final damn : À quoi consiste donc ma pratique ?

À apprendre à lire un théorème et à ne pas faire l'économie du travail. Je souhaite ici faire partager ce que je ressens : une impression de bonheur intellectuel face à cette lecture si prégnante et si présente que l'on peut avouer que l'on ne comprend pas un théorème ou une définition et qu'il nous faut l'apprendre par cœur. Cela ne ressortit à aucune technique mais à une métaphysique qui se fait amour, qui se fait Éros.

Car ce que l'on sait par cœur est inaliénable ; on ne peut déposséder quiconque de ce qu'il porte en lui de connaissance dans un monde où règnent la censure et l'oppression, le bruit, l'exil dans une condition humaine qui se limite à une sécurité matérielle vide de toute intériorité. Savoir par cœur une page de démonstration n'est pas un exercice, car ce *logos* entre en nous, peut-être trop difficile ou trop violent, inacceptable pour nous, mais cela signifie qu'on l'invite à prendre logis dans la maison de notre être et qu'on accepte de vivre ensemble !

C'est prendre le risque qu'un soir, un théorème, une définition, un corollaire frappent à la porte de notre demeure, et il se peut que cet invité détruise et incendie entièrement la maison. Il se peut aussi que par un grand coup d'aile il nous dévalise ! Mais il faut accepter de prendre cette théorie en nous, je ne sais les mots pour décrire la richesse de cette expérience que j'ai mille fois pratiquée, de ce trésor que je n'ai jamais pu épuiser, puisqu'il contient le virtuel de l'apprentissage, l'univers de la tolérance et le scintillement solaire de l'attention.

Je lis souvent les théories **Andrew WILES**, _médaille Fields de Mathématiques en 1998, pour sa démonstration du grand théorème de **Fermat** mais aussi de la conjecture affirmant que : toute courbe elliptique est modulaire _ quand bien même je ne comprendrais pas ces théories, j'apprends certaines parties par cœur pour qu'ils soient partie intégrante de mon être. L'œuvre tout à coup m'accueille sans s'expliquer, et j'ai enfin accès à cette théorie. Je ne peux pas pour autant retourner à mes cours devant mes étudiants de Master Première année en clamant que j'ai enfin compris l'œuvre, ce qui serait à la fois arrogant et prétentieux. Cependant, il est vrai que l'incompréhension s'est transformée en amour, en fertilité, en acte de confiance envers ce qui m'échappe. À mes yeux, toute bonne lecture acquitte une dette d'amour.

Qu'est-ce que cela veut dire ?

Lire un théorème, c'est tenter d'accumuler les renseignements sur la structuration d'un ordre qui, lui répond à un désordre l'ayant précédé. Travailler, ouvrager, pratiquer l'érudition : c'est pointer des traces, répertorier des nœuds, des liens, mettre au jour des points de flexion, des tensions, cartographier, repérer des zones et délimiter des espaces dans lesquels se disent plus et mieux les lapsus, les oublis ou les dérapages, les fausses négligences, véritables boussoles et sextants pour faire le point. Car il faut autant s'attarder sur les revers que sur les avers. Au bout du compte, trames et fils de chaînes isolés, cordes et quadrillages exacerbés, on peut proposer un réseau et des textures lisibles. Ou du moins sensibles. Lire un théorème, c'est développer sans relâche la finesse de notre perception mais aussi notre réception, en pratiquant le nomadisme, en furetant, en allant et venant. En emmagasinant un nombre incalculable d'informations pour mieux en oublier la plupart, en entassant des données et des détails, en collectionnant les abords qui paraissent sans intérêt, en évoluant dans les marges qui restent les lieux les plus proches du sens. Il s'agit de lire autour et à partir de, de circonscrire, tel un chef de guerre, fin stratège et habile tacticien afin d'identifier le germe de nouveauté, d'appropriation personnelle et de réorientation qu'un concept ou une définition peuvent recevoir lorsqu'ils sont utilisés par tel ou tel scientifique, par telle ou telle dynamique délibérée d'un texte particulier. L'emploi d'un concept non pas comme un miroir, mais comme une fenêtre, non pas comme le reflet en surface de ce qu'on y projette arbitrairement, mais comme une *ouverture* sur autre chose. Dans quel but ?

Chercher le sens du sens. Ce faisant, il faut le tempérament et la volonté, l'esprit de conquête et la détermination, la patience et la compétence. Et, l'humilité, la capacité d'accepter qu'on puisse ne pas comprendre, d'abord, *a priori,* puis qu'on puisse défricher grandement avant de déchiffrer finement. Ces longues heures passées à s'approprier un théorème, doivent faire prendre conscience aux élèves et aux étudiants que tous les concepts ne sont compréhensibles qu'avec des clés, différentes d'une époque à une autre, mais dans chaque cas nécessaires. Qu'une œuvre est un labyrinthe, plus ou moins compliqué, dans lequel on se perd sûrement si l'on n'a pas dans un dévidoir conceptuel en permanence à sa portée, la longue traînée d'un fil d'Ariane. Je ne sais comment m'expliquer autrement, cette lecture implique une responsabilité au sens moral (*responsibility*) et la capacité _ spirituelle et psychologique _ qui est la nôtre de répondre à une attente chez l'Autre (*answerability*). Bref, notre enseignement scientifique devrait avoir pour objectif, de penser en mathématiques ou en physique, que de réduire les mathématiques par exemple à des règles d'arithmétique…

Passeur de concepts, je m'efforce d'insérer le cheminement de l'intelligence des découvreurs comme **Cauchy**, **Gauss**, **Lebesgue**, **Fibonacci**, **Fourier**, **Riemann**, ou **Schwartz**… dans le cheminement propre de l'élève ou de l'étudiant, de prendre celui-ci par la main pour l'aider à progresser non dans un parcours imposé, mais dans son parcours personnel, en y éprouvant du plaisir.

Par le biais du tact conceptuel, j'ai espoir d'être arrivé à distinguer, de manière presque subliminale, le poids, les rugosités, la portée, les connotations d'un même concept mais ce n'est pas le même _ que j'ai trouvé dans un passage de **Fourier**, ou de **Laplace**, qui ont été écrits _ et c'est bien là ce qui est fascinant _ à peu près à la même époque. C'est la théorie qui nous apprend à quels moments après **Weierstrass** le concept de fonction dérivable, acquiert une nouvelle tonalité, ou à quels carrefours après **Laurent Schwartz** le concept de « distribution » change de fréquence, de densité et d'écho. La littérature, **Mallarmé** y insistait, est faite de mots. Les mathématiques sont faites de concepts.

I should say to myself: Do it yourself !_ Faites-le vous-même ! _ Me disait mon maître.

Mon directeur de recherche, me disait autrefois : « Presque tout ce que nous faisons est écrit sur le sable, et s'efface dans le vent. Toutefois, il nous est peut-être donné d'avoir une tablette de métal sur laquelle nous inscrirons un ou deux signes plus durables. »
Ces modestes lignes sont écrites sur le sable. Mais la plage est belle et je ne regrette pas de m'y être promené…

Il existe une fracture dans la pensée contemporaine, avec, d'un côté, les physiciens qui prétendent que chaque avancée les conduit plus près d'une théorie finale, et, de l'autre, le reste d'entre nous qui fait observer que la différence entre ce qui a été accompli et ce qui reste à faire demeure ce qu'elle a toujours été, c'est-à-dire infinie. _

There is fissure in contemporary thought, physicists arguing that each advance brings them closer to a final theory and the rest of us observing that the difference between what has been and what needs to be accomplished remains what it has always been, which is to say infinite.

Qu'il me soit permis de poser cette question : ***« Alors, pourquoi cette incontournable tristesse ? »***

D'éminents philosophes ont, à leur tour tenté de rendre leurs formulations linguistiques aussi « mathématiques » que possible, aussi imperméables que possible à la joie rebelle du discours naturel. Mais combien de **Spinoza**, combien de **Frege**, combien de **Wittgenstein** ? Et dans quelle mesure ces ascètes de la vérité eux-mêmes ont-ils eu gain de cause ? Au crépuscule, **Socrate** chanta.

"So why the inescapable sadness?"

Certain eminent philosophers have, in turn, attempted to make their linguistic articulations as "mathematical" as possible, as immune as possible from the mutinous joy of natural speech. But how many Spinozas, how many Freges or Wittgensteins are there, and to what degree have even these ascetics of truth prevailed? At twilight, Socrates sang.

« Les hommes d'habitude, voient les choses telles qu'elles sont et disent ''pourquoi ?''. Je rêve de choses qui ne sont pas et je demande ''pourquoi pas ?'' » BERNARD SHAW

Pouvons-nous essayer d'en éclairer quelques raisons ? Sommes-nous en droit de demander pourquoi la pensée humaine ne devrait être joie ?

Can we try and clarify some of the reasons ? Are we entitled to ask why human thought should not be joy?

Je pense à cette parole de Mozart disant : « Une symphonie entière m'est venue. »

On doit savoir où l'on est et être heureux d'avoir une place, même si elle est petite : quelle joie que de pouvoir mettre dans les boîtes aux lettres de bons messages et d'être sûr qu'ils iront à leurs destinataires !

Mozart m'inspire, l'élégance, la liberté, l'inventivité, la répugnance aux compromis, l'horreur du toc, la jubilation de faire ce que je fais et de le faire de mon mieux, et de m'enthousiasmer. Il s'agit de mathématiques, ici, pas de musique, mais où est la différence ? Je m'éveille chaque matin en me disant que sur cette petite planète polluée où fourmillent injustices, horreurs et camps de concentrations, il y a eu un **Shakespeare**, un **Schubert**, un **Mozart**, un **Platon** et de nombreux intellectuelles qui ont été à leur hauteur, de façon très différente. J'aime me souvenir de ces géants comme ceux des hommes qui auront particulièrement contribué à l'honneur de l'esprit humain.

J'ai appris à connaître auprès de mes maîtres, le caractère concret des mathématiques : connaître un par un les objets mathématiques, les nombres, les groupes, les espaces, j'essaie de les connaître sous beaucoup d'angles, de plusieurs points de vue, ils me sont familiers, j'essaie de connaître leurs particularités et parfois même leurs pathologies; j'ai compris que les mathématiques étudient des objets qui sont ce qu'ils sont, qui ne dépendent ni de notre bon vouloir ni de ce que nous voudrions qu'ils soient.

Mais j'essaie aussi, lorsque cela devient nécessaire, de prendre le recul, l'envol, monter sur la montagne pour regarder loin et voir globalement : c'est à cela que j'utilise l'« abstraction » et les outils des mathématiques.

J'ai appris de mes maîtres que la théorie, _ parfois grandiose, toujours pertinente, et toujours élégante _ ne vient que lorsqu'elle s'impose naturellement ; elle n'est jamais là *a priori*, jamais comme un but en soi. Si on peut l'éviter, on l'évite ; sinon, alors, on la fait belle, forte, soignée, lisse, et son efficacité en découle.

Mon usage des mathématiques, à mon modeste niveau, est donc à la fois retenu et *élitaire*. C'est un des ingrédients de l'« élégance ». Il en est d'autres, difficiles à expliquer au profane ; croyez bien qu'il n'y a là nulle arrogance, juste un grand regret de ne pouvoir partager ce plaisir en quelques lignes.

L'un de mes maîtres me poussait sans cesses vers la générosité. C'est ce que, j'essaie de faire ici, avec vous, et tous ceux qui éprouvent ce désir de communiquer leur passion. Si « Être généreux », c'est partager ses intuitions, expliquer ses idées, communiquer sa compréhension, alors la générosité est tout simplement l'un des plaisirs essentiels de l' « amateur », _ traduisez, celui qui aime (*amatore*) ce qu'il connaît et interprète _ des mathématiques.

Faut-il dire ce que **Nicolas Bourbaki** m'a apporté ? Mais qui est-ce ? Une association de scientifiques de tout premier niveau, créée dans le but d'établir des fondements solides aux Mathématiques ; un modèle de fonctionnement désintéressé, mû par la seule nécessité de la compréhension, l'explication, la clarification, pour la beauté et la raison – et la jubilation des mathématiques ! – sans aucune espèce de rétribution sous quelque forme que ce soit (l'appartenance à Bourbaki était secrète) ; des mois et des mois de travail passé au crible de la critique impitoyable du groupe, de son exigence et de sa passion communes ; une sorte de modèle de service public universel de la science, en quelque sorte.

Il se plaît à dire que les mathématiciens se contentent de mettre leur production à la disposition de tous, comme sur des étagères où l'on peut venir se servir. Noter, cependant, que ce service-là est gratuit. Et que le mathématicien ne fabrique et ne dépose sur l'étagère que ce qui lui plaît. Ce qui le motive, c'est le plaisir, pas l'appât du gain. C'est donc dans cet esprit que j'essaie de partager mes productions intellectuelles. Mon Directeur de Recherche dit souvent qu'il s'est étonné toute sa vie qu'on l'ait payé, si longtemps, pour une activité qu'il aimait tant. Il est heureux qu'on trouve de la sorte une parole libre et qu'on puisse désirer sa puissance pour soi sans craindre ni risquer l'aliénation. C'est bien la jouissance et la curiosité qui ont été, sans aucun doute, les moteurs de mon travail. Chacun de nous a sa chance, nous sommes tous invités à la fois à interpréter l'Univers et découvrir ses mystères, d'admirer sa beauté et sa complexité, pianiste et compositeur, et, bien sûr ! Passionné de l'être.

Y a-t-il projet plus louable ?

Le concept que je cherche à définir est à la fois plus modeste et plus élusif. Je veux faire ressortir la question de notre expérience et de notre compréhension de la forme pleine de sens à une intuition morale. Et pourtant, ce dernier terme est lui aussi trop vague et trop exalté. Je recherche une catégorie manifestement intelligible _ et difficilement exprimable _ dans laquelle la courtoisie, l'éthique de transmission, la confiance perceptible peuvent être vues comme n'étant rien d'autre que la quintessence du sens commun.

Sur un arbre de sens, je cherche à organiser, c'est-à-dire à codifier, ma rencontre avec les concepts des *transformées de Fourier*, de *Laplace* et la *théorie des distributions*. En résumé, je cherche à définir une notion aussi claire que le jour, et pourtant aussi élusive et vulnérable que toute autre dans les finesses de la psychologie. C'est à la fois une rubrique courtoise _ une politesse de la rigueur _ et quelque chose d'aussi banal qu'une poignée de main. « Courtoisie de l'esprit », « scrupule de perception », « politesse de l'intelligence » sont de grossières approximations.

Ré-écrire, c'est mon combat quotidien contre le néant, pour ne pas voir très probablement la disparition d'une certaine *auctoritas*, mot latin signifiant la garantie de la chose écrite. Je crois toujours profondément à la parole grecque classique qui nous dit que la mémoire est la mère de toutes les Muses. Ce qu'on ne peut pas traduire, on ne le connaîtra jamais profondément, on ne l'aimera jamais assez.

Ré-écrire aussi pour que des collectivités de sensibilités, bâties sur l'éphémère, ne remplacent pas l'ancienne autorité des savoirs. Ce qu'Eluard a appelé "le dur désir de durer", qui a été la clé de la vie des grands mathématiciens, ne disparaisse pas par la même occasion, alors que l'on assiste au triomphe de l'anonymat.

Ré-écrire encore pour que des valeurs qui existaient depuis les Grecs ne puissent pas s'éteindre, ou plutôt s'inverser. Notre devoir n'est-il pas d'identifier ce qui dans un étudiant peut et veut se réveiller et d'aplanir tous les obstacles financiers, sociaux qui peuvent l'en empêcher ? Un grand système éducatif ne donne-t-il pas leur chance aux esprits curieux ? Si c'est oui deux fois, alors arrêtons de niveler !

Ré-écrire enfin pour des étudiants époustouflants d'intelligence, d'enthousiasme, de puissance créatrice, mais surtout pour tous les esprits curieux. Et pour des jeunes qui ont un certain dégoût face à l'omnipotence du marché.

Théo Héikay-Universitaire/pdf