PROBLÈMES, pour les "Master Première Année", promotion - 2010/2011

Sujets proposés par Théo Héikay

a) Soit $(\mathbb{R}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, $f \in C^2([-1, +1])$, $f \geq 0$ ayant en 0 un maximum strict avec $f''(0) < 0$.

Montrer qu'il existe $\gamma > 0$, tel que

$$f(s) \leq e^{-\gamma s^2} \times f(0),\ s \in [-1, +1].$$

b) En déduire que $\int_{-1}^{+1} (f(s))^n ds \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{(f(0))^{n+1/2}}{\sqrt{|f''(0)|}} \times \sqrt{2\pi}$, n réel, $n \longrightarrow +\infty$.

On effectuera d'abord le changement de variable $s = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$ et l'on appliquera le théorème de convergence dominé de Lebesgue à :

$$\left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)^n \chi_{[-\sqrt{n},\, +\sqrt{n}]}(u),$$

en admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

c) Application : On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$.

Vérifier que Γ est définie pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$; calculer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Mettre Γ sous la forme

$$e^{-(s-1)} \times (s-1)^s \int_{+1}^{+\infty} (f(t))^{s-1} dt, \text{ pour } s > 1,$$

avec f vérifiant les hypothèses du a). En déduire une formule asymptotique pour $\Gamma(s)$ quand s tend vers l'infini.

On montrera que $\int_{+1}^{+\infty} (f(t))^{s-1} dt \leq e^{-\delta_s} \times o\left(\frac{1}{s}\right)$, pour un $\delta > 0$, quand $s \longrightarrow +\infty$

et est, par conséquent, infiniment petit par rapport à $\int_{-1}^{+1} (f(t))^{s-1} dt$.

Correction

a) Il résulte immédiatement du développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 de f en 0 que dans un voisinage ouvert V de 0, on a :

$f(s) = f(0) + f''(0)\,\dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s^2}{2} \times \varepsilon(s)$ (notons que $f' = 0$) par ailleurs, toujours par Taylor,

$e^{-\gamma s^2} = 1 - \gamma s^2 + \dfrac{\gamma^2 s^4}{2}\, e^{-\theta\gamma s^2}$, *θ, fonction de γ et de s, θ* $\in]0, 1[$, d'où :

Si on impose γ tel que $0 < \gamma \le \gamma_0 < -\dfrac{f''(0)}{2f(0)}$,

alors

$$0 > -\gamma s^2 \ge -\gamma_0 s^2 > s^2 \frac{f''(0)}{2f(0)}$$

d'où ,

$$1 > 1 - \gamma s^2 \ge 1 - \gamma_0 s^2 > 1 + s^2 \frac{f''(0)}{2f(0)}$$

comme

$$\frac{f(s)}{f(0)} = 1 + s^2 \frac{f''(0)}{2f(0)} + \frac{s^2}{f(0)}\,\varepsilon(s).$$

Notons que $f(0) > 0$ (f admet un maximum strict).

$$\frac{f(s)}{f(0)} \le 1 - \gamma s^2, \text{ pour tout } \gamma,\ 0 < \gamma \le \gamma_0 < -\frac{f''(0)}{2f(0)}\ ;$$

ceci et l'inégalité $1 - u \le e^{-u}$ pour $u \ge 0$, entraînent

$$f(s) \leq f(0)\, e^{-\gamma s^2}, \ \ s \in \text{adhérence de V}, \quad 0 < \gamma < \gamma_0 \,.$$

Maintenant, dans l'ensemble compact $[-1, +1] \setminus V$, $f < f(0)$ et, par conséquent,

$$\sup f = \max f = M < f(0).$$

D'autre part, la famille des fonctions $\{ e^{-\gamma s^2} \}$, $\gamma > 0$ tend uniformément vers 1 sur $[-1, +1] \setminus V$ quand $\gamma \longrightarrow 0$. Il existe donc $\gamma_1 > 0$, tel que

$$e^{-\gamma s^2} \geq \frac{M}{f(0)}, \text{ car } \frac{M}{f(0)} < 1 \text{, pour } s \in [-1, +1] \setminus V, \ 0 < \gamma < \gamma_1 \,.$$

Choisissons $\gamma : 0 < \gamma < \inf(\gamma_0 , \gamma_1)$.

Alors $f(s) \leq f(0)\, e^{-\gamma s^2}$, ce pour $s \in [-1, +1]$.

b) Effectuons le changement de variable $s = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$,

$$\int_{-1}^{+1} (f(s))^n\, ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n du$$

Considérons alors $\dfrac{\sqrt{n}}{(f(0))^n} \displaystyle\int_{-1}^{+1} (f(s))^n\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\, du,$

où

$$g_n(u) = \chi_{[-\sqrt{n},+\sqrt{n}]}(u)\,\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}.}\right)^n}{(f(0))^n}$$

Montrons d'abord que tous les éléments de la suite $(g_n)_{n \in I\!N}$ sont majorés par une même fonction intégrable.

En effet,

$$g_n(u) \leq \chi_{[-\sqrt{n},+\sqrt{n}]}(u) \times e^{-\gamma u^2} \leq e^{-\gamma u^2},$$

avec

$$\gamma > 0 \text{ car } \frac{f(s)}{f(0)} \leq e^{-\gamma s^2}$$

pour tout $s \in [-1, 1]$,

$$\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}.}\right)^n}{(f(0))^n} \leq \left(e^{-\gamma u^2/n}\right)^n = e^{-\gamma u^2},$$

Il reste alors à calculer

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(u)\,,\ ie\ \lim_{n \to +\infty} e^{n\,Log\,[f(u/\sqrt{n})\,/\,f(0)]},$$

avec

$$f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}\frac{u^2}{n} + \frac{u^2}{n}\,\varepsilon\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right), \text{ on a}$$

$$n \, Log \frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)} \sim \frac{f''(0)}{2f(0)} u^2 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(u) = e^{[f''(0)/2f(0)]\, u^2}$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[f''(0)/2f(0)]\, u^2}\, du .$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, on a aussi, pour $\gamma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}},$$

par le changement de variable $v = \sqrt{\gamma} \times u$, d'où $dv = \sqrt{\gamma}\, du$, il suffit alors de poser

$$\gamma = -\frac{f''(0)}{2f(0)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\, du = \sqrt{\frac{f(0)}{|f''(0)|}} \times \sqrt{2\pi},$$

ce qui établit la formule asymptotique annoncée.

c) On vérifie immédiatement que Γ est définie pour $s > 0$. En effet au voisinage de 0, la fonction intégrée est positive et équivalente à t^{s-1} quand s tend vers 0 ($s > 0$), l'intégrale est de même nature que celle de t^{s-1} et converge pour $s > 0$.

Au voisinage de $+\infty$, $e^{-s}\, t^{s-1} < \dfrac{1}{t^2}$.

Par intégration par parties,

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \text{ d'où } \Gamma(n) = (n-1)\,!,\ n \in \mathbb{N}$$

De plus remarquons que $t^{s-1} = e^{(s-1)\,\mathrm{Log}\,t}$ d'où ,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t+(s-1)\mathrm{Log}\,t}\,dt,$$

et si l'on fait le changement de variables $t = (s-1)\,u$, avec $s > 1$, on a

$$\Gamma(s) = (s-1)^s \int_0^{+\infty} \left(e^{-u+\mathrm{Log}\,u}\right)^{(s-1)} du$$

c'est-à-dire la forme désirée, si l'on pose $u = v + 1$, $v > -1$, avec

$$f(v) = e^{-v+\mathrm{Log}(v+1)} = e^{g(v)},\ f \geq 0\ ;$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow g' = -1 + \frac{1}{v+1} = 0, \text{ c'est-à-dire pour } v = 0, \text{ et alors}$$

$$f'' = g''(0) \times e^{g(0)} = -1.$$

Il résulte alors du *b)* que

$$\int_{-1}^{+1} (f(v))^{s-1} dv \sim \frac{1}{\sqrt{s-1}} \times \sqrt{2\pi}, \text{ quand } s \longrightarrow +\infty.$$

Il reste à voir que $\int_1^{+\infty} (f(v))^{s-1}dv$ est infiniment petit par rapport à $\dfrac{1}{\sqrt{s-1}}$, quand $s \longrightarrow +\infty$.

Or $f(v) = e^{g(v)}$, $g(v)$ décroît strictement à partir de 0 et $g(0) = 0$, donc $g(1) < 0$, et par conséquent,

$$g(v) - \frac{g(1)}{2} < 0, \ \forall\, v \geq 1,$$

$$e^{(g(v) - g(1)/2)^{(s-1)}} \leq e^{g(v) - g(1)/2} \quad \text{pour} \quad s - 1 > 1 \quad \text{et} \quad v \geq 1,$$

et tend vers 0 quand $s \longrightarrow +\infty$, d'où :

$$\int_1^{+\infty} e^{(-v + \mathrm{Log}\,(v+1))^{(v-1)}}\, dv \leq e^{(g(1)/2)\,(s-1)}\, \varepsilon\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

avec $\varepsilon\left(\dfrac{1}{s-1}\right) \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow +\infty$, ce qui établit le résultat.

On a donc

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-(s-1)}(s-1)^{s-1/2}, \text{ ou } \Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-s}\, s^{\,s-1/2},$$

puisque

$$(s-1)^{s-1/2} \longrightarrow \frac{1}{e} \text{ quand } s \longrightarrow +\infty.$$

En particulier, on obtient la formule de Stirling : $n\,! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{\,n+1/2}$

Partiel de THÉORIE DE LA MESURE

Sujet proposé par Théo Héikay

Exercice I

Soit (Ω, B, P) une espace de probabilité. Soit $f \in L^1(P)$ et ψ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, supposée dérivable.

α) Montrer que

$$\psi\left(\int_\Omega fdP\right) \leq \int_\Omega \psi \circ fdP$$

On rappelle que pour tout $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, il existe a_i et b_i tels que

$$\psi(x) = \sup a_i x + b_i \,.$$

β) Dans le cas où $\Omega = \{1, \ldots n\}$, B = $\mathbb{P}(\Omega)$ et $P(i) = \dfrac{1}{n}$, montrer en choisissant judicieusement f et que si $y_1, \ldots, y_n$ sont des réels positifs, alors

$$(y_1 y_2 \ldots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \ldots y_n}{n}$$

Exercice II

α) Montrer que toute fonction réelle intégrable définie sur un espace mesuré (ξ, ζ, Π) est telle que : $\ell\Pi\,(\,|f\,| > \ell\,) \longrightarrow 0$ lorsque $\ell \longrightarrow +\infty$, mais qu'il existe des fonctions réelles mesurables non intégrables jouissant de cette propriété.

(2) β) Montrer que si $(\xi\,) < +\infty$, une fonction réelle f est intégrable si et seulement si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

$$(1) \quad \sum_{n\,\in\,\mathbb{N}^*} \Pi(\,|\,f\,|\,) > n < +\infty$$

$$(3) \quad \sum_{n\,\in\,\mathbb{N}^*} n\,\Pi(\,n-1 \leq |\,f\,| \leq n)$$

Ces conditions restent elles nécessaires (resp. suffisantes) pour l'intégrabilité de f lorsque la mesure Π est infinie. Donner un ou plusieurs contre- exemples.

PROBLÈME

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et on considère une probabilité m sur $\mathbb{R}$ telle que $m(A) \leq K\,\lambda(A)$ pour tout borélien A, où K est une constante positive. L'objectif de ce problème est de montrer que m admet une densité.

1) Pour chaque entier $n \geq 1$ on considère les intervalles dyadiques

$$I(n, i) = \left]\frac{i}{2^n}, \frac{(i+1)}{2^n}\right[$$

(où, $i \in \mathbf{Z}$) ; soit également les nombres réels

$$a(n, i) = \frac{\mathrm{m}(\mathrm{I}(n, i))}{\lambda(\mathrm{I}(n, i))}.$$

On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$f_n = a(n, i)$ si $x \in \mathrm{I}(n, i)$ <u>Montrer que</u> f_n <u>est borélienne</u>, avec $0 \leq f_n \leq \mathrm{K}$.

2) Montrer que

$$\int f_n \, d\lambda = 1 \text{ et que } \int f_n^2 \, d\lambda \leq \mathrm{K}$$

3) Soit $n, k \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour chaque $i \in \mathbf{Z}$ l'intervalle $\mathrm{I}\,(n, i)$ est réunion disjointe des intervalles $\mathrm{I}(n + k, j)$ pour j allant de $i2^k$ à $(i + 1)2^k - 1$, montrer que

$$\int f_n f_{n+k} \, d\lambda = \int f_n^2 \, d\lambda.$$

Déduire de la question précédente que

$$\int (f_{n+k} - f_n)^2 \, d\lambda = \int f^2_{n+k} \, d\lambda - \int f_n^2 \, d\lambda,$$

puis montrer que la suite $\int f_n^2 \, d\lambda$ converge vers une limite finie, et en déduire que f_n est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\lambda)$.

4) Soit f la limite de la suite f_n dans $\mathrm{L}^2(\lambda)$. Montrer que $0 \leq f \leq \mathrm{K}$ λ-p.p.

Montrer que

$$\int_A f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_A f \, d\lambda \text{ pour tout borélien borné A.}$$

5) En calculant $\int_A f_n \, d\lambda$ lorsque A = I(m, i) et $n \geq$ m, déduire de la question précédente que $\int_A f \, d\lambda = \mathrm{m(A)}$ pour tout A de la forme précédente, puis pour tout A intervalle dyadique borné (i.e. de la forme A = $]s, t[$ avec s, t de la forme $i2^{-n}$) ; en déduire que f est la densité de m.

Engage your mind! Elevate your world!

Par Théo Héikay

Exercice I

α) Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il existe deux suites a_n et b_n telles que $\varphi(x) = \sup_{(n \in IN)} a_n\, x + b_n$.

D'où :

$$\int_\Omega \varphi \circ f dp = \int_\Omega \sup_{n \in IN} (a_n f + b_n)\, dp \geq \sup_{n \in IN} a_n \int_\Omega f\, dp + b_n = \varphi\left(\int_\Omega f\, dp\right)$$

β) Soit $E = \{1, \ldots, n\}$, $\xi = IP(E)$ et $m : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $m\{i\} = \dfrac{1}{n}$ pour tout i.

Soit $\varphi(x) = e^x$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(i) = \text{Log } y_i$.

$$\text{On a } \int f\, dm = \frac{1}{n}[\text{ Log } y_1 + \ldots + \text{Log } y_n] = \text{Log } (y_1 \ldots y_n)^{1/n}$$

Donc

$$\varphi\left(\int_E f\, dm\right) = (y_1 \ldots y_n)^{1/n}$$

Par ailleurs $\varphi \circ f\,(i) = y_i$.

$$\text{Donc } \int_E \varphi \circ f\, dm = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

D'où

$$((y_1 \ldots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

***Exercice** II*

α) On a $\int |f|\,dm \geq \int_{|f|>a} |f|\,dm \geq a\,\mathrm{m}(|f|>a)$ pour tout $a>0$.

Donc

$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{m}(|f|>a)=0$$

Il découle du théorème de Lebesgue que $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{|f|>a} |f|\,dm = 0$

D'où $$\lim_{a\to+\infty} a\,m(|f|>a)=0$$

Contre-exemples

a) Soit

$$\begin{cases} f(x)=1 \text{ pour } x\geq n, \\ f(\mathrm{x}) = 0 \text{ si } x<n \end{cases}$$

f est *non intégrable*. $m\{x,\ f(x)>a\}=0$ si $a\geq 1$. Donc $a\,m\{x, f(x)>a\}=0$.

b) Soit

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour } x>0 \\ f(x)=0 \text{ si } x\leq 0 \end{cases}$$

La fonction *f* *n'est pas intégrable* .

Pourtant

$\lambda\{\frac{1}{\sqrt{x}} > a\} = \lambda\{x,\ -\frac{1}{a^2} > x\} = \frac{1}{a^2}$ et $am\{x, \frac{1}{\sqrt{x}} > a\} = \frac{1}{a}$ tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini.

β) On a

$$\int_E (\mid f(x) \mid - 1)\, dm(x) \leq \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{\mid f(x) \mid > n}\, dm(x) \leq \int_E \mid f(x) \mid dm(x)$$

Donc si m(E) < + ∞ ,

$$\int_E \mid f(x) \mid dm(x) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\,(\mid f \mid > n) < \infty$$

En revanche si $m(E) = +\infty$, $\int_E \mid f(x) \mid dm(x) < +\infty \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\,(\mid f \mid > n) < \infty$

mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Reprenons l'exemple du a)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x \geq n \\ f(x) = 0 \text{ si } x < n \end{cases}$$

$\forall\, n \geq 1,\ m(\mid f \mid > n) = 0$ *et pourtant f n'est pas intégrable.*

De même

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(x) = 0 \text{ pour x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\lambda\{\frac{1}{\sqrt{x}} > n\} = \frac{1}{n^2}\ ,\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda\{\frac{1}{\sqrt{x}} > n\} < +\infty$$

et pourtant f n'est pas intégrable.

(2) On a

$$\int |f|\, dm = \sum_{n \geq 0} \int_{n \leq |f| \leq n+1} |f|\, dm$$

Donc

$$\sum_{n \geq 0} n \text{ m}(n \leq |f| \leq n+1) \leq \int |f|\, dm \leq \sum_{n \geq 0} (n+1) \text{ m}(n \leq |f| \leq n+1)$$

On voit donc que

$$\int |f|\, dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} n \text{ m}(n \leq |f| \leq n+1) < +\infty\,.$$

PROBLÈME

1) Chaque fonction $g_{n,i} = a(n, i)\chi_{I(n, i)}$ est borélienne, donc f_n, comme somme (dénombrable) sur i de ces fonctions, est aussi borélienne. Enfin on déduit

$$0 \leq a(n, i) \leq K \text{ de } 0 \leq m(A) \leq K\lambda(A) \text{, donc } 0 \leq f_n \leq K.$$

2) On a $\int f_n \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int g_{n,i} \, d\lambda$ (théorème de la limite monotone)

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^n} a(n, i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m(I(n, i)) = m(\mathbb{R}) = 1.$$

Par ailleurs, $0 \leq f_n \leq K$. implique $\int f_n^2 \, d\lambda \leq K \int f_n \, d\lambda$, donc $\int f_n^2 \, d\lambda \leq K$.

Si $i\, 2^k \leq j < (i + 1)\, 2^k$, la fonction $f_n f_{n+k}$ vaut $a(n, i)\, a(n + k, j)$ sur l'intervalle $I(n + k, j)$. Par suite,

$$\int f_n f_{n+k} \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j = i2^k}^{(i+1)2^k} \frac{1}{2^{n+k}} a(n, i)\, a(n + k, j)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} a(n, i) \sum_{j = i\, 2^k}^{(i+1)\, 2^k} m(I(n + k, j)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a(n, i)\, m(I(n, i))$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a(n, i)^2 \frac{1}{2^n} = \int f_n^2 \, d\lambda .$$

3) Pour la première assertion il suffit de développer le carré $(f_{n+k} - f_n)^2$. On en déduit que la suite $\alpha_n = \int f_n^2 \, d\lambda$ est croissante, et comme elle est majorée par K d'après la question 2) on en déduit qu'elle converge.

Donc,

$\int f^2_{n+k} \, d\lambda - \int f_n^2 \, d\lambda = \alpha_{n+k} - \alpha_n \longrightarrow 0$ si n et donc $n + k$ tendent vers l'infini : cela montre que (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\lambda)$.

5) On sait qu'il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge vers f λ-p.p., et comme $0 \leq f_{n_k} \leq K$ on en déduit que $0 \leq f \leq K$ λ-p.p. Soit ensuite un borélien A ; d'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left| \int_A f_n \, d\lambda - \int_A f \, d\lambda \right| = \left| \int_A (f_n - f) \, \chi_A \, d\lambda \right| \leq \sqrt{\int_A (f_n - f)^2 \, d\lambda} \sqrt{\lambda(A)}$$

et le résultat en découle.

6) Soit $A = I(m, i)$; un calcul analogue à celui de la question 3) montre que si $n \geq m$, $\int_A f_n \, d\lambda = m(A)$; par suite $\int_A f \, d\lambda = m(A)$ d'après la question 5). Par additivité la même relation est vraie si A est un intervalle dyadique borné. Comme $A \longrightarrow m(A)$ et $A \longrightarrow \int_A f \, d\lambda$ sont des mesures coïncidant sur les intervalles

dyadiques bornés, elles coïncident pour tout borélien, ce qui revient à dire qu'elles sont égales et f est la densité de m.

T.D. de THÉORIE DE LA MESURE

Par Théo Héikay

Exercice I

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{t^{1/2}} - 1)}$ *pour* $x > 0$.

i. *Justifier l'existence de* $f(x)$.
ii. *Trouver un équivalent de* $f(x)$ *lorsque* $x \longrightarrow 0^+$, *puis lorsque* $x \longrightarrow +\infty$.
iii. *Montrer que* f *est intégrable sur* $]0 , +\infty[$.
iv. *Calculer* $\int_0^{+\infty} f(x)$.

a) La fonction g définie sur, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que à t on associe $\dfrac{1}{t\,(e^{t^{1/2}} - 1)}$ est continue sur $]0 , +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, $\quad g(t) \sim \dfrac{e^{-t^{1/2}}}{t}$, $\quad$ et l'on a $\quad \displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 \frac{e^{-t^{1/2}}}{t} = 0$;

d'où $\quad \dfrac{e^{-t^{1/2}}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Donc g est intégrable sur $[x\ ,+\infty[$, pour tout $x > 0$.

b) Au voisinage de 0^+, $g(t) \sim \dfrac{1}{t^{1+½}} = \dfrac{1}{t^{3/2}}$. Comme $t \longrightarrow \dfrac{1}{t^{3/2}}$ n'est pas intégrable sur $]0\ ,+\infty\ [$, d'après le théorème de sommation de relations de comparaison, on a :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\, dt \sim \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{x}},$$

car $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\ \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Par le changement de variable C^1- *difféomorphisme* de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$:

$s = \sqrt{t}$, on a : $ds = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, soit $dt = 2s\,ds$

et

$$\frac{1}{t\,(e^{\,t^{1/2}} - 1)} = \frac{1}{s^2(e^s - 1)} = \frac{1}{s^2\, e^s(1 - e^{-s})} = \frac{e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}\ ,$$

d'où :

$$\int_x^{+\infty} g(t)\, dt = 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} s\frac{e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}\, ds\ .$$

Par intégration par partie on a : on pose $u = \dfrac{1}{s} \Rightarrow du = -\ \dfrac{dx}{s^2}$ et $dv = \dfrac{e^{-s}ds}{1 - e^{-s}} \Rightarrow$ $v = \mathrm{Log}\,(1 - e^{-s})$

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} s\frac{e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}\,ds = \left[\frac{1}{s}\times \operatorname{Log}(1-e^{-s})\right]_{\sqrt{x}}^{+\infty} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \operatorname{Log}(1-e^{-s})\frac{ds}{s^2} \quad (*)$$

Comme

$$\frac{\operatorname{Log}(1-e^{-s})}{s^2} \sim -\frac{e^{-s}}{s^2} = o\left(\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}\right),$$

d'après le théorème de sommation de relation de comparaison, on a :

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \operatorname{Log}(1-e^{-s})\frac{ds}{s^2} = o\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\left(\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}\right)ds\right).$$

On déduit de (*) que

$$\int_{x}^{+\infty} g(t)\,dt = \left[\frac{1}{s}\times \operatorname{Log}(1-e^{-s})\right]_{\sqrt{x}}^{+\infty} = -2\,\frac{\operatorname{Log}(1-e^{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}.$$

Donc :

$$f(x) \sim \frac{2\,e^{-x^{1/2}}}{\sqrt{x}}.$$

c) En tant que primitive de fonction continue, f est continue sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 $f(x) \sim \dfrac{2}{x^{1/2}}$ et au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\dfrac{2\,e^{-x^{1/2}}}{\sqrt{x}} = 0$, donc, $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ d'après b).

Donc

$$f \in L^1_c\,(\,]0, +\infty\,[, \mathbb{R})\,.$$

d) Comme $f \in L^1_c\,(\,]0, +\infty\,[, \mathbb{R})$, intégrons par partie $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, en posant :

u = $f(x)$, ce qui implique du = $f'(x)\,dx$ et dv = $dx \Rightarrow$ v = x

d'où $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \left[xf(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xf'(x)\,dx$ or, au voisinage de 0,

$$xf(x) \sim 2x^{1-½} \Rightarrow \lim_{x \to 0} xf(x) = 0.$$

Et au voisinage de $+\infty$, $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0.$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} xf'(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x^{½}} - 1}$;

$$\forall\, x > 0 \quad \frac{1}{e^{x^{½}} - 1} = \frac{e^{-x^{½}}}{1 - e^{-x^{½}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x^{½}} \text{ car, } 0 < e^{-x^{½}} < 1.$$

Notons $f(x) = e^{-(n+1)\int x^{½}}$. La série de fonctions positives, continues et intégrables (*cf.* $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$) sur $]0, +\infty[$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et a pour somme $F : x \longmapsto \dfrac{1}{e^{x^{½}} - 1}$, intégrable sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de convergence monotone, on a :

$$\int_0^{+\infty} F = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x^{½}}\,dx.$$

Le changement de variable C^n – *difféomorphisme* de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$:

$t = (n+1)\sqrt{u}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x^{1/2}}\, dx = \frac{2}{(n+1)^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \frac{2\Gamma(2)}{(n+1)^2}.$$

Donc, $$\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} F = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 2\,\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Intégrale ! je t'ai soûlée dans mes salles de classes ; je t'ai soûlée sans te désaltérer ; _ je t'ai baignée dans les nuits pleines d'étoiles ; je t'ai bercée sur les vagues ; j'ai voulu t'endormir sur les flots… Intégrale ! Intégrale ! que te ferais-je ? que veux-tu donc ? Est-ce que tu ne te lasseras pas de ce chantage qui m'oblige à connaître l'ivresse, qui selon toi : « me fera croire meilleur, plus grand, plus respectable, plus vertueux, plus riche, etc.…. que je ne suis. » ?

Avertis par l'Analyse Mathématique, choisis par elle. Ce n'est même pas "nous", mais la Mathématique chante, puisqu'elle est vibration. C'est une batterie de concepts, un aigle blanc et noir, sagesse, force, beauté, formule de Taylor, somme de Riemann, recherche d'équivalent. L'exponentielle en or, la démonstration en blanc. La partition s'écrit toute seule, joie, harmonie… Le côté intimidant de l'exercice est vaincu par le côté jubilant de sa résolution.

LES ESPACES L^p (E, B, μ)

Par Théo Héikay

PROBLÈME

Soit (χ, B, μ) un espace mesuré, $\mu(X) = 1$ et $f \in L^1(\chi, \mathrm{B}, \mu)$, $f \geq 0$.

α) Montrer que

$$\text{Log}\, f \text{ est mesurable et } \int_\chi^* \text{Log}\, f \, d\mu \leq \text{Log}\left(\int_\chi f \, d\mu\right)$$

où $\int_\chi^* F\, d\mu = \int_\chi F\, d\mu$ si F est intégrable $\int_\chi F\, d\mu = -\infty$ sinon.

$\left(\text{On pourra observer que Log } t \leq t - 1 \text{ et intégrer cette inégalité avec } \dfrac{f}{\|f\|_{L^1}}\right).$

β) Montrer qu'il y a égalité dans α) si, et seulement si, $f = C^{te} > 0$.

$$\left(\text{En particulier l'égalité entraîne Log } f(x) - \text{Log } \|f\| - \frac{f(x)}{\|f\|} + 1 = 0.\right)$$

γ) Montrer que

$$\lim_{r \to 0} \| f \|_r = \exp \left[\int_{\chi}^{*} \operatorname{Log} f \, d\mu \right]$$

(Se ramener à $\frac{1}{r} \int_{\chi} \left(f^{r} - 1 \right) d\mu \longrightarrow \int_{\chi}^{*} \operatorname{Log} f \, d\mu$; montrer alors que $\frac{f^{r} - 1}{r}$ converge en décroissant vers Log f, quand $r \longrightarrow 0$).

Exercice I

Montrer que si K est l'ensemble de Cantor, χ_K est Riemann intégrable, mais que $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable.

Exercice II

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, f λ- localement intégrable.

Montrer que $\int_0^N f \, d\lambda$ n'a pas de limite quand $N \longrightarrow +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} | f | \, d\lambda = +\infty$.

Étudier la réciproque.

Correction

Par Théo Héikay

α) supposons $f \geq 0$.

$(\operatorname{Log} f)^{-1}(-\infty) = f^{-1}(0)$ est mesurable et sur le complémentaire $\operatorname{Log} f$ est la composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue, donc mesurable, d'où $\operatorname{Log} f$ est mesurable.

Vérifions que $\operatorname{Log} t \leq t - 1,\ t \geq 0$, or la dérivée de $\varphi(t) = 1 - t + \operatorname{Log} t$ est égal à $\frac{1}{t} - 1$, φ est maximal en $t = 1$ et $\varphi(1) = 0$, donc $\varphi(t) \leq 0,\ t \geq 0$.

Ajoutons, pour la suite, que $\varphi(t) < 0$, pour $t \neq 1$.

On a alors, pour tout x, $\operatorname{Log} \frac{f(x)}{\| f \|_{L^1}} \leq \frac{f(x)}{\| f \|_{L^1}} - 1$ et, par intégration, avec $\mu(X) = 1$, on obtient le résultat.

β) Soit $\psi(x) = \varphi\left(\frac{f(x)}{\| f \|_{L^1}}\right) = \operatorname{Log} \frac{f(x)}{\| f \|_{L^1}} + 1$. On a vu, dans la question α) que

$$\psi \leq 0 \text{ et } \int_\chi \psi \, d\mu \leq 0.$$

L'hypothèse ici est $\int_\chi \psi \, d\mu = 0$, d'où $\psi = 0$, μ-*pp*, c'est-à-dire

$$\varphi\left(\frac{f(x)}{||f||_{L^1}}\right) = 0, \ \mu\text{-}pp.$$

D'après le α), on a nécessairement $f(x) = ||f||_{L^1} = C^{te}$, μ- *pp*.

La réciproque est immédiate.

γ) $||f||_r = \left(\int_\chi f^r d\mu\right)^{1/r} = \exp\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{Log}\left(\int_\chi f^r d\mu\right)\right)$ puisque $f > 0$, μ-pp, f^r a pour limite 1 quand $r \longrightarrow 0$, et la convergence est dominée par $1 + f$, pour $r < 1$, en effet :

ou bien $f < 1$ et alors $f^r < 1$; ou bien $f > 1$ et alors $f^r < f$, donc $\int_\chi f^r d\mu \longrightarrow 1$, quand $r \longrightarrow 0$, et $\frac{1}{r}\,\mathrm{Log} \int_\chi f^r d\mu \sim \frac{1}{r}\left(\int_\chi (f^r - 1)\, d\mu\right)$, puisque $\mu(X) = 1$.

Par suite, il suffit de montrer que l'on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}\left(\int_\chi (f^r - 1)\, d\mu\right) = \int_\chi^* \mathrm{Log}\, f\, d\mu$$

Considérons la fonction $r \longmapsto \frac{t^r - 1}{r} = \varphi_t(r)$.

On a $(\varphi_t)'(r) = \frac{t^r.\,\mathrm{Log}\, t^r - t^r + 1}{r^2} \geq 0$, puisque $\psi(u) = u.\ \mathrm{Log}\ u - u + 1$, qui a pour dérivée Log u, est minimal en $u = 1$ et $\psi(1) = 0$.

Ainsi $\varphi_f(r)$ est une fonction croissante de r et tend vers Log f quand r tend vers 0.

Alors, ou bien $\lim \int_\chi \varphi_f(r)d\mu(t) = -\infty$, d'où le résultat ;

ou bien $\lim \int_\chi \varphi_f(r)d\mu(t)$ est finie et le théorème de Beppo-Levi permet de conclure.

Exercice I

* χ_K *est Riemann- intégrable* En effet, $\forall\ x \in \complement$ K, par construction même de K, il existe un intervalle contenant x et contenu dans $\complement$ K, par conséquent, χ_K est continue sur les éléments de $\complement$ K. Comme χ_K est bornée elle est donc Riemann-intégrable.

* $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *n'est pas Riemann-intégrable.*

En effet,

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\,dx = \inf_{\{I_K\}}\left(\sum_{k=1}^{n} \sup \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\ |\ I_k\ |\right) = 1$$

($\{I_K\}$ étant une partition de [0, 1] formée d'intervalles) et

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\,dx = \sup_{\{I_K\}}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Inf} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)|\ I_k|\right) = 0.$$

Exercice II

Supposons que $\int_0^{+\infty} \mid f \mid d\lambda < +\infty$. Alors comme f est mesurable, f est intégrable et, par conséquent, $\int_0^{N} f \, d\lambda$ converge, lorsque $N \longrightarrow +\infty$, vers $\int_0^{+\infty} f \, d\lambda$, puisque la suite $\{ \mid \chi_{[0,\, N]} \, , f \mid \}$ est dominée par $\mid f \mid$.

La condition est donc nécessaire, mais elle n'est pas suffisante ; en effet, on peut trouver des fonctions telles que

$$\int_0^{+\infty} \mid f \mid d\lambda = +\infty \text{ et } \int_0^{N} f \, d\lambda$$

converge quand $N \longrightarrow +\infty$.

Par exemple, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, ou bien , $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n\,,\, n+1]}(x) dx$.