



## Travaux Dirigés D'Analyse

Sujet proposé par Théo Héikay – Chargé de Cours

*What proof have we, what proof could we have, that the progress of empirical investigation and theoretical construction is limitless, that the speculative intellect will continue on its seemingly open-ended journey through "seas of thought" ?*

**Exercice 1** \_ Soit  $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathbb{R})$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  existe et  $x \mapsto \int_x^{x+1} (f')^2$  est bornée.

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

**Exercice 2** \_ Soit  $f$  continue, à valeurs positives, sur  $[0, 1]$ .

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^1 [f(x)]^n dx \right\}^{1/n}$ .

**Exercice 3** \_ Soit  $f$  continue, strictement positive sur  $[0, 1]$ .

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^1 [f(x)]^{1/n} dx \right\}^n$ .

**Exercice 4** \_ Soit  $f$  continue, 1-périodique, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ ,

$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$  converge, limite lorsque  $\lambda$  tend vers  $0^+$ .

*En écho au printemps des poètes... Un Théorème, mais à tout prendre, qu'est-ce?/Un rayon lumineux qui nous éclaire, une promesse/Plus précise, une conjecture qui a été prouvée,/Un point culminant vers lequel convergent les concepts d'une théorie /C'est une vérité qui se voit au moyen des concepts,/Un instant d'infini qui illumine une démonstration,/Une beauté qu'on découvre à la sueur de l'âme,/Une impression de bonheur intellectuel,/Une intuition qui claque en donnant du sens au sens,/Et de l'harmonie aux idées, aux choses apparemment sans lien./Une conviction profonde qui nous apprend à aimer, /Et fréquenter ce que le monde avait de plus beau !*

– Théo Héikay –

**Exercice 5** \_ Soit  $a \in ]0, 1[$ ,  $x_0 > 1$ ,  $f \in \mathcal{C}^0([x_0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ . On suppose que, pour tout  $x \geq x_0$ , on a  $2xf(x^2) \leq af(x)$ . Montrer que  $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$  converge.

**Exercice 6** \_ Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  telle que les intégrales  $\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)dx$  et  $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx$  convergent. Montrer que  $\int_0^{+\infty} [f(x)]^2 dx$  converge et que :

$$\left(\int_0^{+\infty} [f(x)]^2 dx\right)^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)dx \int_0^{+\infty} f'^2(x)dx. \text{ Quand a-t-on l'égalité ?}$$

**Exercice I** \_ Soit une suite de nombres réels  $b_n > 0$ .

α) Existence, pour  $n \geq 2$ , de  $a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + k \frac{b_n}{n}\right)^{-n}$ .

β) Montrer que  $a_n \geq \frac{1}{e^{b_n - 1}}$  et que  $a_n b_n \leq 2$ .

γ) On suppose la suite des  $b_n$  convergente vers  $b > 0$ .

Montrer que la suite des  $a_n$  a une limite  $> 0$ .

**Exercice II** \_ On pose  $u_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \dots + \frac{1}{6n-2}$ . Étudier la limite  $\lambda$  de cette suite et trouver un équivalent de  $u_n - \lambda$ .

**Exercice III** \_ On pose  $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ . Étude de la série de fonctions de terme général  $u_n$ . Si  $f$  est la fonction somme, équivalents en  $0^+$  et en  $+\infty$  de  $f$ .

*Quelle preuve avons-nous, quelle preuve pourrions-nous avoir, que le progrès de la recherche empirique et de la construction théorique est sans limites, que l'intelligence spéculative poursuivra son périple apparemment sans fin à travers les « océans de pensée » ?*

*En écho au printemps des poètes... Un Théorème, mais à tout prendre, qu'est-ce?/Un rayon lumineux qui nous éclaire, une promesse/Plus précise, une conjecture qui a été prouvée,/Un point culminant vers lequel convergent les concepts d'une théorie ;/C'est une vérité qui se voit au moyen des concepts,/Un instant d'infini qui illumine une démonstration,/Une beauté qu'on découvre à la sueur de l'âme,/Une impression de bonheur intellectuel,/Une intuition qui claque en donnant du sens au sens,/Et de l'harmonie aux idées, aux choses apparemment sans lien./Une conviction profonde qui nous apprend à aimer, /Et fréquenter ce que le monde avait de plus beau !*

- Théo Héikay -

**Exercice IV** \_ Trouver la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^3 x \varphi(x)}{(1+n^2 x^2)^2} dx$ , lorsque  $\varphi$  est  $C^1$  et bornée.

**Exercice V** \_ On pose  $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{1}$ , et on définit  $f$  par  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$ .

$\alpha$ ) Domaine de définition de  $f$ . Continuité, dérivabilité.

$\beta$ ) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

$\gamma$ ) Établir que,  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = 2K e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1} dt$ . En déduire la valeur de  $K$ .

**Exercice VI** \_ Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue par morceaux et bornée, et  $\alpha$  un réel fixé. Déterminer la limite de :  $u_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left[-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right] dx$ .

**Exercice VII** \_ Étudier la fonction définie par  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$ . Dérivabilité, calcul de  $F'$  et de  $F$ .

**Exercice VIII** \_ Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{a-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{a-1}}{1} dx$ .

**Exercice XIX** \_ Soit  $h_a(x) = \int_0^a \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$ ,  $a > 0$ . Montrer que  $h_a$  est  $C^{+\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Trouver une équation différentielle vérifiée par  $h_a$ , déterminer  $h_a$  à l'aide de :

$\varphi_a : x \mapsto \varphi_a(x) = \int_0^x \frac{\sin ta}{t} dt$ . Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ .

**Exercice XX** \_ Soit  $(\lambda_n)$  une suite croissante de réels telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ , et  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

telle que  $\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1} dt$  converge. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) \sin(\lambda_n t) dt}{1}$

*En écho au printemps des poètes... Un Théorème, mais à tout prendre, qu'est-ce?/Un rayon lumineux qui nous éclaire, une promesse/Plus précise, une conjecture qui a été prouvée,/Un point culminant vers lequel convergent les concepts d'une théorie ;/C'est une vérité qui se voit au moyen des concepts,/Un instant d'infini qui illumine une démonstration,/Une beauté qu'on découvre à la sueur de l'âme,/Une impression de bonheur intellectuel,/Une intuition qui claque en donnant du sens au sens,/Et de l'harmonie aux idées, aux choses apparemment sans lien./Une conviction profonde qui nous apprend à aimer, /Et fréquenter ce que le monde avait de plus beau !*

- Théo Héikay -