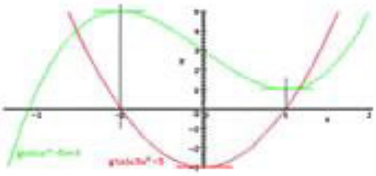


The essence of mathematics resides in its freedom / *Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique*
--- Georg Cantor **--- Galilée**

Suites et séries numériques

Comment vous donner une idée amusante des séries ? En pensant peut-être aux pyramides, ou aux cairns en montagne, c'est-à-dire à une œuvre obtenue en rajoutant sans arrêt un petit quelque chose, un caillou. Ou bien une stalagmite à laquelle chaque goutte qui tombe apporte quelques grains de calcite… ou à un objet en laque, obtenu par couches successives.
La formulation mathématique de ces ajouts va donc faire intervenir une addition, et un passage à la limite : le cadre tout trouvé des séries sera donc celui des espaces vectoriels normés.

Qu'appelle-on espace vectoriel ? Un espace vectoriel est un ensemble d'objet ou d'éléments qui peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres (le résultat étant encore un élément de l'ensemble), de telle sorte que les formules usuelles de calcul soient encore valables.

Idées générales

Le corps $\mathbb{R}$ étant le seul corps ordonné valué complet, la relation d'ordre joue un rôle très important dans l'étude des suites et des séries de terme général u_n réel.

C'est pourquoi, pour les suites, une bonne démarche consisterait à examiner une éventuelle monotonie, que la suite soit du type « $u_n = f(n)$ », ou $u_{n+1} = f(u_n)$ », ou définie par une intégrale, (ne pas oublier l'aspect forme linéaire positive de l'intégrale agissant sur les fonctions de variable réelle, à valeurs réelles).

L'étude des suites en « $u_{n+1} = f(u_n)$ » peut se faire par récurrence, ou par étude des variations de la fonction $x \longmapsto x - f(x)$.

Ne pas oublier quand même le **Théorème du point fixe**, ni l'éventualité de points répulsifs.

La **formule de la moyenne**, cela existe, **Taylor Lagrange** ou **Young** aussi,

Ne pas oublier le recours à la série de terme général $w_n = u_{n+1} - u_n$.

Quand aux séries numériques, ou de terme général dans un Banach E, on commence par une étude de la convergence absolue éventuelle, (E, *e.v.n.* non complet, cette démarche est à proscrire car la convergence absolue n'implique pas la convergence).

Avant d'appliquer un critère précis, (d'Alembert …), commencer par évaluer l'ordre de grandeur de $\left|u_n\right|$ en le remplaçant par un équivalent.

Ne pas oublier le côté « condition suffisante » des critères de convergence, et n'allez jamais dire « puisque la série converge on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ … », même si vous en avez fortement envie.

Pour la *semi-convergence,* bien sûr il y a les séries alternées, 'soyez précis avec le critère), mais n'oubliez pas qu'avec $u_n = v_n$, en écrivant $u_n = v_n + (u_n - v_n)$ on peut parfois conclure très facilement ; mais ne pas se contenter d'un illicite $u_n \approx v_n$ lorsqu'il ne s'agit pas de séries à termes de signe constant. Cette technique, (ajouter et retrancher l'équivalent) s'emploie aussi pour les séries quelconques.

Quand u_n est du type $f(n)$ avec f positive décroissante, ou même f de signe quelconque, penser au lien avec les intégrales impropres.

Des outils importants : $\begin{cases}\text{la sommation par paquets}\\ \text{la } \textbf{transformation d'Abel}\\ \text{les développements limités}\end{cases}$

En ce qui concerne la recherche d'équivalents du terme général u_n d'une suite qui tend vers 0, pensez à chercher α tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u^{\alpha}_{n+1} - u^{\alpha}_{n} = \ell \neq 0$. Par Césaro on aura $\dfrac{u^{\alpha}_{n} - u^{\alpha}_{0}}{n}$ tend vers ℓ d'où $u^{\alpha}_{n} \approx n\ell$ donc $u_n \approx (n\ell)^{1/\alpha}$.

Ceci s'applique, pour v_n qui tend vers ℓ, à $u_n = v_n - \ell$, ou si v_n tend vers l'infini, à $u_n = \dfrac{1}{v_n}$.

Si u_n est la somme partielle d'une série divergente, (ou le reste d'une série convergente) de terme général positif a_n, se rappeler qu'avec $b_n = a_n$, on obtient $v_n \approx u_n$, avec v_n somme partielle, (ou reste d'ordre n) de la série des b_n.

Dans ce type de démarche, b_n devient souvent du genre $f(n)$ et les encadrements par les intégrales servent beaucoup.

Quelques idées en vrac.

Pour étudier des suites doubles, on peut leur associer la suite des sup $(u_n,\ n \geq p)$ et des inf $((u_n,\ n \geq p)$.

Ne pas oublier aussi le Théorème d'inversion des limites, d'emploi facilité sur $\mathbb{R}$, par l'utilisation de la relation d'ordre et de la monotonie des suites.

Penser aux liens ente suite et série, aux suites extraites, surtout dans des suites monotones.

Parfois, un calcul direct avec les formules liées aux suites arithmétiques ou géométriques conviendrait très bien.

Stirling, $\left(n\,! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$, une valeur sûre qui peut encore servir.

Quand on évalue une somme s_n de termes $u(n, k)$, k variant, et que l'on cherche la limite des s_n : on a de « plus en plus de termes, chaque terme étant fonction de fonction de n ; on peut être tenté de se ramener à une somme finie, si on peut majorer uniformément la somme des autres.

Quand on somme d'une façon, voir si on ne peut pas sommer autrement (un exercice en T.D.) nous servira d'exemple : c'est du Fubini en somme.

Dans la recherche d'un équivalent du terme général u_n *d'une suite monotone* qui converge vers 0, ou d'un équivalent de $u_n - \ell$ si elle converge vers ℓ ou de $\frac{1}{u_n}$ si elle diverge), l'utilisation d'un équivalent du terme général $x_n = u_{n+1} - u_n$ de la série associée peut servir. On suppose donc x_n équivalent à y_n.

Primo _ Si la série des x_n *converge,* la suite des u_n converge.

Supposons d'abord qu'elle converge vers. Alors le reste de la série des x_n, qui vaut :

$$\mathrm{R}_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p) = -u_n$$

est équivalent au reste

$$\mathrm{S}_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} y_p$$

Si la suite des u_n converge vers $\ell \neq 0$, en posant $v_n = u_n - \ell$, on a :

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, donc $R_n = - v_n$, et cette technique donne un équivalent de $u_n - \ell$.

Secundo _ *Si la série des* x_n *diverge,* dans ce cas la suite des u_n diverge, vers $+ \infty$ si elle est croissante, $-\infty$ si elle est décroissante, mais dans ce cas les sommes partielles des séries des x_n et des y_n sont des infiniments grands équivalents, d'où :

$$X_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} x_p = \sum_{p=0}^{n-1} u_{p+1} - u_p = u_n - u_0,$$

équivalent à

$$Y_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} y_p$$

Bien sûr ceci n'a d'intérêt que si le calcul d'un équivalent pour le reste (ou la somme partielle), de la série des y_p est facile, ce qui est le cas par exemple des termes en $y_n = f(n)$ avec f positive , décroissante, d'où une comparaison avec des intégrales.

Dans ce raisonnement on a utilisé le résultat, qui doit être connu, sur les **équivalents dans les séries** : pour une série à termes de signe constant, u_n, si $u_n - v_n$, les séries sont de même nature et :

en cas *de convergence,* les restes d'ordre n sont des infiniments petits équivalents.

en cas de divergence, les sommes partielles d'ordre n sont des infiniments grands équivalents.

Pour ce qui concerne la *nature d'une série* pas d'équivalent pour les séries de terme général u_n de signe quelconque, mais … si $u_n \sim a_n$, avec a_n terme général d'une série plus facile à étudier, penser à écrire :

$u_n = a_n + (u_n - a_n)$, et à étudier les deux séries de termes généraux a_n et $b_n = u_n - a_n$, pour éventuellement conclure.

Clefs de lecture I

Jusqu'ici, j'ai essayé de vous familiariser avec les différents concepts tels qu'ils sont enseignés en Amphithéâtre. Certes, nous sommes souvent sortis de la salle de classe, mais c'était toujours dans le but de suivre les « destinées » de ces objets dans le vaste monde de l'analyse, avant de retourner aussitôt dans notre salle de Travaux Dirigés, plus dégourdis et plus conscients, avec un capital de réflexions nouvelles. Nous les avons en quelque sorte, observées de haut, au grand angle. Il est sans doute temps de tenter un autre type d'expérience et d'essayer de les explorer de l'intérieur, en immersion.
Il s'agit de comprendre ce que ces concepts sont mais également ce qu'ils pourraient _ et devraient _ être.
Ne serait-ce que l'espace d'un instant, laissons-nous transporter au cœur de formulations séquentielles, « sentons-les » comme les sentent justement ceux qui les vivent parfois de l'intérieur, avec notre imagination et nos sentiments. Chacun des exercices que nous allons aborder, lance des feux particuliers.

Exercice I Soit une suite de nombres réels $b_n > 0$.

α) _ Existence, $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n \geq 2 \\ \text{de} \\ a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n} \end{array} \right.$

β) _ Montrer que $\quad a_n \;\geq\; \dfrac{1}{exp(b_n) \;-\; 1}$ et que $\; a_n\, b_n \;\leq\; 2.$

γ) _ On suppose la suite des b_n convergente vers $b > 0$. Montrer que la suite des a_n a une limite > 0.

Ma solution

α) _ Si pose $u_{k,n} = \dfrac{1}{\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$, pour n fixé, si k tend vers $+\infty$, $u_{k,n}$ est équivalent à $\left(\dfrac{n}{b_n}\right)^n \times \dfrac{1}{k^n}$:

avec $n \geq 2$ on a le terme général d'une série convergente, donc $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$ existe.

β) _ On a $\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n = exp\left[n \;\mathrm{Log}\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)\right]$, et en utilisant l'inégalité $\mathrm{Log}\,(1 + x) \leq x$, valable pour $x > -1$,

on a :

$$\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n \leq \exp\left(n\,k\frac{b_n}{n}\right) = exp\,(k\,b_n)\,,$$

d'où

$$u_{k,n} \geq \left[\frac{1}{exp\;(\,b_n)}\right]^k,$$

et, en sommant pour $k \geq 1$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{exp\,(b_n)}\right]^k = \frac{1}{exp\,(b_n)} \times \frac{1}{1 - exp\,(-b_n)}$$

soit

$$a_n \geq \frac{1}{exp(b_n) - 1}\,.$$

L'inégalité $\mathrm{Log}(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$, (valable pour $x \geq 0$), ne conduit pas $a_n\, b_n \leq 2$,

(sauf erreur de ma part), mais, pour n fixé $k \longmapsto u_{k,n} = f(k) = \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$ est une fonction positive

décroissante de k, et l'inégalité : $f(k) \leq f(x)$, pour $x \in [k - 1, k]$, conduit, en intégrant, à :

$u_{k,n} = f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\left(1 + x\frac{b_n}{n}\right)^n}$, et en sommant, à : $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + x\frac{b_n}{n}\right)^n}$,

soit, comme on a supposé $n \geq 2$:

$a_n \leq \dfrac{n}{b_n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \left[-\dfrac{1}{\left(1 + \frac{b_n}{n}x\right)^{n-1}}\right]_0^{+\infty}$ ou encore : $a_n \leq \dfrac{n}{b_n} \times \dfrac{1}{n-1}$ avec

$\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{n - 1 + 1}{n - 1} = 1 + \dfrac{1}{n-1} \leq 2$, on a bien $a_n\, b_n \leq 2$, pour tout $n \geq 2$.

γ) _ Comme $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$, et que l'on cherche :

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}\right]$, on se retrouve à la tête d'un problème

d'interversion de limite.

Posons $f(p,\ n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$.

Pour p fixé, si n tend vers $+\infty$, $\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n = exp\left[n \text{ Log}\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)\right]$, avec les b_n bornés, tend vers e^{kb} car l'exposant est équivalent à $n \times k\frac{b}{n} = kb$, puisque les b_n tendent vers $b > 0$; donc

$$\lim_{n \to +\infty} f(p,\ n) = \varphi(p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{e^{kb}} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{e^b}\right)^k.$$

Pour n fixé, $\lim_{p \to +\infty} f(p,\ n) = \psi(n) = a_n$, et cette convergence est uniforme en n. Pour le justifier, nous allons utiliser un critère de la convergence dominée, (en n), de la série des $u_{k,n} = \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$.

D'abord, $\lim_{n \to +\infty} b_n = b > 0$, et les b_n sont tous $\neq 0$, donc la suite des b_n est minorée par un $\beta > 0$; traduire la limite avec $\varepsilon = \frac{b}{2}$, d'où n_0 tel que :

$n \geq n_0 \Rightarrow b_n \geq b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$, puis prendre $\beta = \inf\left(b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_{n_0},\ \frac{b}{2}\right)$.

On a donc $0 \leq u_{k,n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{k\beta}{n}\right)^n}$.

Puis, $x \longmapsto g(x) = \left(1 + \frac{k\beta}{x}\right)^{-x}$ est monotone,

car

$$g(x) = exp\left[- x \text{ Log}\left(1 + \frac{k\beta}{x}\right)\right],$$

donc

$$g'(x) = \left[- \operatorname{Log}\left(1 + \frac{k\beta}{x}\right) - \frac{x\left(\frac{-k\beta}{x^2}\right)}{1 + \frac{k\beta}{x}} \right] g(x)$$

est du signe de $h(x) = \dfrac{k\beta}{x + k\beta} - \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{k\beta}{x}\right)$.

On a

$$h'(x) = -\frac{k\beta}{(x + k\beta)^2} - \frac{-\frac{k\beta}{x^2}}{1 + \frac{k\beta}{x}} = \frac{k\beta}{x(x + k\beta)} - \frac{k\beta}{(x + k\beta)^2} = \frac{(k\beta)^2}{x(x + k\beta)^2},$$

h' fonction positive pour $x > 0$, donc h est croissante, or $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, donc h est négative et g' aussi sur $]0, +\infty[$.

Mais alors g est décroissante, et $u_{k,n}$ est majoré par $g(2)$ pour $n \geq 2$, soit $0 \leq u_{k,n} \leq \dfrac{1}{\left(1 + \frac{k\beta}{2}\right)^2}$ équivalent (lorsque $k \longrightarrow +\infty$) à $\dfrac{4}{\beta^2 k^2}$: on a bien convergence normale, (en n), de la série des $(u_{k,n})_{k \geq 1}$, et le Théorème d'interversion des limites s'applique, (on est à valeurs dans $\mathbb{R}$ complet) :

donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \varphi(p)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ existent en étant égales,

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^b}\right)^k = \frac{1}{e^b} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{e^b}}$$

soit encore

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{e^b - 1}, \text{ valeur strictement positive.}$$

La conviction dans le domaine de l'enseignement est la transmission d'une technique de raisonnement. Pour convaincre que la théorie des suites et séries fonctionne, il me faut en dire les limites.

Clefs de lecture II

Les plus grands esprits ne se consacreraient pas totalement à la physique, à la biologie, à l'histoire, à la philosophie, aux mathématiques s'ils n'étaient pas aussi largement payés de retour. C'est rassurant, à notre modeste niveau, de parvenir à tirer de grandes satisfactions de l'objet de notre étude, bien que plongés dans la grisaille quotidienne de la routine. Le moment de bonheur qui nous récompense « de la ronde des heures trop semblables » finit toujours par arriver.

Exercice II

On pose $u_n = \dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+4} + \ldots + \dfrac{1}{6n-2}$. Étudier la limite λ de cette suite et trouver un équivalent de $u_n - \lambda$.

Ma solution

En écrivant :

$$u_n = \frac{1}{3n} \times \left[\frac{1}{1+\frac{1}{3n}} + \frac{1}{1+\frac{4}{3n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{3n-2}{3n}} \right] = \frac{1}{3n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\dfrac{k+\frac{1}{3}}{n}},$$

on reconnaît une expression qui conduit à la formule de la moyenne dans les intégrales.

En posant $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, f fonction définie continue, de classe C^{∞} en fait, sur $[0, 1]$, on a : $u_n = \dfrac{1}{3}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) :$$

c'est une somme de Riemann, de limite $\lambda = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\text{Log } 2}{3}$.

Pour la recherche de l'équivalent, on doit comparer une intégrale et une somme : on coupe l'intégrale en somme pour obtenir :

$$v_n = \lambda - u_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

et comme

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \int_{k/n}^{k+1/n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) dt,$$

il vient :

$$v_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\right] dt,$$

et le reste repose sur la formule de Taylor Lagrange à un ordre convenable.

Pour t entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, il existe c_k entre t et $\dfrac{k+\frac{1}{3}}{n}$ tel que :

$$f(t) - f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 f''(c_k),$$

avec c_k fonction de t et de k bien sûr, mais avec $\left|f''(c_k)\right| \leq \|f''\|_\infty$, norme prise sur [0, 1], segment sur lequel f'', continue, est bornée.

On a donc :

$$v_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)dt \ +$$

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 f''(c_k)dt$$

La première somme vaut:

$$s_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \frac{1}{18n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

donc

$$n\,s_n = \frac{1}{18}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

expression ayant pour limite $\frac{1}{18}\int_0^1 f'(t)dt = \frac{1}{18}\,[f(1) - f(0)] = -\frac{1}{36}$, somme de Riemann pour f').

La deuxième somme se majore :

$$\left|t_n\right| \leq \frac{1}{6}\,\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{18}\,\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n}$$

$$\leq \frac{1}{18}\,\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n^3} \leq \frac{\|f''\|_\infty}{54n^2}\,.$$

On a donc $v_n = s_n + t_n$, avec $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n\,s_n = -\dfrac{1}{36} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\,t_n = 0 \end{cases}$ car $\left|n\,t_n\right| \leq \dfrac{\|f''\|_\infty}{54n}$:

l'équivalent cherché est donc $-\dfrac{1}{36n}$.

Clefs de lecture III

Comme on l'a déjà constaté, les manuels offrent avant tout cette « ronde » monotone. Il est rare qu'ils rendent quelque lueur des feux promis.

Ils enseignent les différents concepts, mais ils n'apprennent pas vraiment à les *sentir*.

Par ailleurs, Italo Calvino l'a justement remarqué, le savant qui n'hésite pas à dire « que ma découverte est belle ! » est tout simplement pathétique.

Les belles choses doivent pouvoir parler d'elles-mêmes, sans fanfares ni sous-titrage.

Seuls certains professeurs inoubliables réussissent à transmettre une authentique vibration pendant leurs cours, parce qu'ils l'éprouvent encore. Il n'est pas facile de le faire … j'essaierai quand même et peu importe si, pour atteindre ce but, il nous faut aller au-delà des programmes de vos partiels. Le vertige, l'*hubris,* pour une matière ne se communique que si l'on parvient aux cimes. Attaquons-nous à cet exercice singulier, mais intéressant.

Exercice III

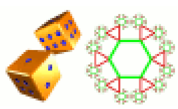
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx$ convergent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} [f(x)]^2 dx$ converge et que

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)dx \int_0^{+\infty} f'^2(x)dx.$$

Quand a-t-on égalité ?

Avant d'essayer de transmettre une théorie, car c'est cela convaincre, je dois l'avoir comprise. L'ennui de la pédagogie est de prétendre transmettre des choses que l'on n'a pas vraiment comprises. Si j'ai tout compris de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de l'intégrale de Riemann, je peux en comprendre la totalité car c'est une théorie inventée par les hommes comportant ses limites.



Ma solution

Pour $0 \leq x \leq y$ on a

$$\left[\int_x^y tf(t)f'(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_x^y t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_x^y f'^2(t)dt\right)$$

par Cauchy Schwarz, donc, comme les intégrales des fonctions $t \longmapsto t^2 f^2(t)$ et $t \longmapsto f'^2(t)$ convergent, on peut rendre le majorant arbitrairement petit pour $y \geq x$ assez grand, d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\,dt$, (par critère de Cauchy).

Or $\int_0 x\, tf(t)f'(t)dt = \dfrac{1}{2}\, x\, f^2(x) - \dfrac{1}{2}\int_0^x f^2(t)dt$, (on intègre par parties avec $u = t$ et $dv = f(t)f'(t)dt$.)

On a alors :

$$xf^2(x) = \int_0^x f^2(t)dt + 2\int_0^x tf(t)f'(t)dt,$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xf^2(x)$ existe dan $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, (car $x \longmapsto \int_0^x f^2(t)dt$ est croissante donc tend vers ℓ_1 ou $+\infty$, alors que la $2^{ième}$ intégrale converge).

Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} xf^2(x) = \ell$ avec $\ell = +\infty$ ou $\ell > 0$ implique avec $\ell' \in\,]0, \ell[$, l'existence de x_0 tel que $x \geq x_0 \Rightarrow xf^2(x) \geq \ell'$ d'où $x^2 f^2(x) \geq \ell' x$ or $\int_*^{+\infty} x^2 f^2(x)dx$ converge : c'est absurde.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xf^2(x) = 0$, mais alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f^2(t)dt = -2\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt$;

on a bien convergence de $\int_0^{+\infty} f^2$.

Puis l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$\left[\int_0^x tf(t)f'(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_0^x t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^x f'^2(t)dt\right)$ donne à la limite, (tout converge)

$\left[\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_0^{\infty} t^2f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right)$ et en multipliant par 4 on a bien, vu la valeur de $\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2$

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2 \leq 4\left(\int_0^{\infty} t^2f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right).$$

S'il y a égalité, le trinôme (en λ)

$$\lambda^2 \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt + 2\lambda \int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt + \int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$$

de discriminant : $\Delta = 4\left(\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt\right)^2 - 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right)$; comme $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double $\lambda_0 = -\dfrac{\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt}{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt}$; autrement dit, il existe λ_0 tel que $\int_0^{+\infty} \left[\lambda_0 tf(t) + f'(t)\right]^2 dt = 0$, d'où (fonctions continues) $\forall t \geq 0$ tel que $\lambda_0 tf(t) + f'(t) = 0$, équation différentielle linéaire qui sur $]0, +\infty[$ admet un espace de solution de dimension 1, donné par $f(t) = \mu\, exp\left(-\lambda_0 \frac{t^2}{2}\right)$, avec $\lambda_0 > 0$, (pour que $\int_0^{+\infty} f^2$ converge).

Or on vérifie que $\forall\ \alpha < 0$, (ici $\alpha = -\frac{\lambda_0}{2}$) la fonction $t \longmapsto f(t) = \mu\, e^{\alpha t^2}$, ($\mu$ quelconque) est telle que $\left(\int_0^{\infty} t^2f^2(t)dt\right)$ converge, $\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$ converge aussi et que l'égalité est vérifiée : faire une intégration par parties dans $\int_0^{+\infty} t^2 e^{2\alpha t^2}dt$ en posant $du = t\, e^{2\alpha t^2}dt$.

Clefs de lecture III

Pour que l'étudiant aborde directement les pics les plus hauts de la créativité scientifique et qu'on lui transmette cette impression de tournis, il est presque indispensable d'affronter des problèmes difficiles et passionnants. L'exercice suivant, loin d'être difficile, n'en est pas moins passionnant.

Exercice IV

Soit $a \in]0, 1[$, $x_0 > 1$, $f \in C^0([x_0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$. On suppose que, pour tout $x \geq x_0$, on a $2xf(x^2) \leq af(x)$.

Montrer que $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$$\pi = 2.22...$$

Ma solution

Sur $[x_0, x_0^2]$, ($x_0^2 > x_0$ car $x_0 > 1$) on a $2tf(t^2) \leq af(t)$ donc

$$\int_{x_0}^{x_0^2} 2tf(t^2)dt \leq a \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

On calcule le 1er membre avec le changement de variable $t^2 = s$, d'où

$$0 \leq \int_{x_0^2}^{x_0^{(2^2)}} f(s)ds \leq a \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

Par récurrence on prouve alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

on a

$$0 \leq u_n = \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(s)ds \leq a^n \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt,$$

car c'est vrai si $n = 1$, et si c'est vrai pour n, comme $\left[x_0^{(2^n)}, x_0^{2^{n+1}}\right] \subset [x_0, +\infty[$

sur lequel $2tf(t^2) \leq af(t)$, on a

$$\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} 2\, t f(t^2)\, dt \;\le\; a \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(t)dt \;\le\; a \times a^n \int_{x_0}^{x_0^{\,2}} f(t)dt.$$

Avec $t^2 = s$, le 1^{er} membre vaut $\displaystyle\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(s)ds$.

Comme $a \in]0, 1[$ la série des $a^n \displaystyle\int_{x_0}^{x_0^{\,2}} f(t)dt$ converge, donc cette de $u_n = \displaystyle\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(s)ds$ aussi et

la somme partielle $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_{x_0^{\,2}}^{x_0^{2^{n+1}}} f$ admet une limite si n tend vers l'infini.

Comme f est à valeurs positive, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0^{\,2}}^{x} f$ est croissante, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_0^{\,2^{n+1}} = +\infty$, $(x_0 > 1)$,

l'existence de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F\left(x_0^{\,2^{n+1}}\right)$ implique celle de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$, d'où le résultat.

Dans la problématique d'une transmission de connaissances, d'une transmission d'une technique de raisonnement, il m'arrive de m'imposer une pause d'une durée de deux à cinq minutes, où je raconte des histoires, pour forcer les étudiants, à m'écouter, comme le prestidigitateur faisant un truc pour attirer l'attention. Les lignes qui suivent illustrent ma façon de faire.

Exercice V

Soit f continue, 1 –périodique, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) f(t)\, dt$ converge, limite lorsque λ tend vers 0^+.

Ma solution

Une fonction continue périodique est bornée sur $\mathbb{R}$, ($\|f\|_\infty = \{|f(x)|\ ;\ x \in [0, 1]\}$), comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \exp(-\lambda t)\, \|f\|_\infty = 0$ pour $\lambda > 0$, l'intégrale impropre converge.

En particulier,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{n} \exp(-\lambda t)\, f(t) dt$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \exp(-\lambda t)\, f(t) dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1} \exp[-\lambda(t+k)] f(t) dt,$$

car f est 1-périodique. On a donc encore

$$F(\lambda) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\lambda k)\right) \int_0^{1} \exp(-\lambda t)\, f(t) dt$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^{1} \exp(-\lambda t)\, f(t) dt, \text{ soit, } (e^{-\lambda} < 1)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^{1} \exp(-\lambda t)\, f(t) dt$$

Or, (Taylor- Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et $-\lambda t$, pour la fonction exponentielle), $\exists\ \theta \in\ ]0, 1[$, θ fonction de λ et de t, tel que

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\theta \lambda t}$$

d'où

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda + o(\lambda)} \int_0^{1} f(t) dt - \lambda \int_0^{1} t f(t) dt + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{1} t^2 e^{-\theta \lambda t} f(t) dt$$

Avec $0 < e^{-\theta \lambda t} \leq 1$ puisque $-\theta \lambda t \leq 0$.

Si $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$, $F(\lambda) \approx \dfrac{\int_0^1 f(t)dt}{\lambda}$ lorsque λ tend vers 0^+

donc $\lim\limits_{\lambda \to 0, \lambda > 0} F(\lambda) = \pm\infty$ (+ ou – , signe de $\int_0^1 f(t)dt$) ;

si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \lambda : 0, \lambda > 0} F(\lambda) = -\int_0^1 tf(t)dt$; et ce parce que

$$\left|\int_0^1 t^2 e^{-\theta\lambda t} f(t)dt\right| \leq \int_0^1 t^2 \|f\|_\infty\, dt = \frac{\|f\|_\infty}{3}.$$

Exercice VI

Soit f continue, à valeurs positive, sur $[0, 1]$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$.

Ma solution

C'est un classique. La fonction f continue sur $[0, 1]$ compact atteint sa borne supérieure, qui vaut $\|f\|_\infty$ ici puisque f est à valeurs positives.

Si $\|f\|_\infty = 0$, $f = 0$, $u_n = \left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n} = 0$ tend vers 0.

Sinon, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|f\|_\infty - \varepsilon \geq 0$, si $\|f\|_\infty$ est atteinte en x_0, il existe, (continuité de f en x_0) un segment $[u, v]$ avec $x_0 \in [u, v] \subset [0, 1]$, tel que $v - u > 0$ et $f(x) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$ sur $[u, v]$.

On a alors $\left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right) \geq \int_u^v [f(x)]^n dx$ car f est à valeurs positives, donc

$$\left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right) \geq \int_u^v (\|f\|_\infty - \varepsilon)^n dx = (v - u)(\|f\|_\infty - \varepsilon)^n$$

d'où

$$\left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq (v - u)^{1/n} (\|f\|_\infty - \varepsilon).$$

Par ailleurs,

$$\left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leq \int_0^1 (\|f\|_\infty)^n dx = \|f\|_\infty$$

et de l'encadrement,

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon)(v - u)^{1/n} \leq \left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leq \|f\|_\infty$$

valable pour tout n, on déduit, pour n assez grand

$$\|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq \left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leq \|f\|_\infty$$

et ε quelconque,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n} = \|f\|_\infty .$$

Exercice VII

Soit f continue strictement positive sur $[0, 1]$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$.

Ma solution

Les énoncés se suivent et se ressemblent … presque.

Sur $[0, 1]$ compact, la fonction continue $x \longmapsto \text{Log}\,[f(x)]$ est bornée et atteint ses bornes, notées a, et b, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $[f(x)]^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right)$ avec $\left(\frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right) \in \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$. Les suites $\left(\frac{a}{n}\right)$ et $\left(\frac{b}{n}\right)$ étant bornées, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right) \leq r$.

On calcule $\exp\left(\frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right)$ en appliquant Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : il existe $\theta(x, n) \in \,]0, 1[$ tel que

$$\exp\left(\frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right) = 1 + \frac{1}{n}\text{Log}\, f(x) + \frac{1}{2n^2}\,[\text{Log}^2 f(x)]\, exp\left[\theta(x, n) \times \frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right],$$

avec $exp\left[\theta(x, n) \times \frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right] \leq e^{\,r}$ en fait.

Donc

$$\left| \int_0^1 [f(x)]^{1/n}\, dx - \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{n}\text{Log}\, f(x)\right) dx \right| \leq \frac{e^{\,r}}{2n^2} \int_0^1 [\text{Log}^2 f(x)]\, dx.$$

Comme $\int_0^1 [\text{Log}^2 f(x)]\,dx$ est une constante par rapport à n, on a

$$\int_0^1 [f(x)]^{1/n}\, dx = 1 + \frac{1}{n}\int_0^1 (\text{Log}\, f(x))dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais

$$\text{Log}\left(\int_0^1 [f(x)]^{1/n}\, dx\right)^n = n\,\text{Log}\left(\int_0^1 [f(x)]^{1/n}\, dx\right)$$

$$= n\,\text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\int_0^1 (\text{Log}\, f(x))dx\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \int_0^1 (\text{Log}\, f(x))dx + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 [f(x)]^{1/n}\, dx\right)^n = exp\left(\int_0^1 (\mathrm{Log}\, f(x))dx\right).$$

Conclusion provisoire…

Il ne peut y avoir qu'une certaine cohérence dans le discours que je tiens, et, pour l'avoir, je me donne des règles.

Au fond, c'est cela, les Mathématiques : une axiomatique par laquelle dès que j'admets une règle logique je n'ai plus le droit de dire n'importe quoi. Je chemine donc doucement grâce à des règles logiques qui me permettent de dire « ceci est vrai », « ceci est une erreur », ou encore « ceci est indécidable ». Peu à peu, j'y ajoute d'autres règles logiques ….