L'*univers* Mathématique est beau, et hors de lui point de salut.

Des millions d'yeux, je le savais, ont contemplé ce paysage, mais pour moi il était comme le premier sourire du ciel. J'avoue faire ici l'expérience de notre humilité face à la résolution des exercices, en vivant chaque instant comme si c'était le premier. Il y a des leçons éthiques et mathématiques à tirer de cette expérience-là : à chaque fois lire une théorie comme la première fois. On dit beaucoup que la Mathématique incorpore entre autres, l'art de l'étonnement.

Mais il y a un double statut de l'étonnement : – une pomme tombe et Newton découvre les lois de l'attraction universelle. L'étonnement est supprimé par la connaissance. Il s'agit d'aller au-delà des apparences : c'est le projet de la démarche scientifique; – mais, au lieu de supprimer l'étonnement, on peut le maintenir. Le monde est énigmatique, même quand on a tout expliqué et qu'on a dissipé tous les mystères. Plutôt que se demander à quoi bon faire des Mathématiques en temps de détresse, il faut se demander d'où vient notre besoin d'avoir la Mathématique comme l'une des plus belles réalisations de la pensée humaine. Qu'est-ce qu'une pratique des Mathématiques ? Un grand point d'interrogation à l'endroit du plus grand sérieux !

L'une des leçons de l'enseignement des Mathématiques est donc de pratiquer l'art de l'étonnement comme un émerveillement recommencé.

N'ayons pas peur de nous poser cette question : La Mathématique comme expérience est-elle encore possible aujourd'hui ? Ce fascicule se propose d'interroger la sublimation d'une théorie dans les questions mathématiques, à la lumière de ce que peut comprendre un étudiant des Classes Préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques françaises, ou des trois premières années universitaires dans les pays de l'O.C.D.E. La démarche scientifique sera la base et l'horizon de cette investigation.

Pourquoi s'intéresser à ces étudiants ? Je constate entant qu'universitaire, que certains ont perdu ce rapport indispensable à la simplicité, à l'étonnement, à l'hésitation, à la lenteur, au dénuement. Pour certains étudiants, être cohérent, sentir, de leur point de vue, que la démarche est cohérente ne va pas de soit. Il me paraît très utile, de les aider à épouser le lest du bonheur pour la grande traversée de la mer qu'est la vie, d'autant plus que les enseignants et les étudiants ne sont pas dans la même temporalité. Le temps de l'acquisition interroge donc le nôtre – celui de la transmission.

En effet, dans quel temps vivez-vous ? Celui de vos projets ou celui de vos rêves ? Du souci ou du plaisir ? Du métro ou de la grève ? De votre journal ou de vos loisirs ? Plus que jamais unifiés par l'information, les hommes n'ont pourtant jamais vécu des temporalités aussi disloquées, hétéroclites, inconciliables.

À la charnière de la transmission des savoirs et des connaissances, j'ai pris beaucoup de plaisir à rechercher ce souffle « eurêka » dans le « temps incorporé » de ce fascicule, en répondant aux questions les plus actuelles qui m'ont été posées.

Tissé de perceptions et de défis intellectuels, le temps de la résolution des exercices de ce fascicule, qui n'est ni celui d'un cours en amphithéâtre ni celui de la recherche de pointe, devient sensible. À l'imaginaire avide du lecteur, j'offre l'appât savoureux de mes personnages : Série entière de rayon de convergence infini, intégrales riemanniennes, théorème de convergence de la loi de Bernoulli vers la loi normale, intégrales de Wallis, polynômes de Legendre, déterminant de Sylvester, théorème des fonctions implicites, fonctions holomorphes, formule de résidu, développement en série entière, familles sommables et dénombrables etc. …, dont cet essai aide à retrouver les caractères mêlés aux paysage de l'Analyse Mathématique. Pourtant, dans les plis de longues démonstrations, dans le cumul des brouillons et des notes, dans la cruauté et le ridicule des passions, l'insignifiance du questionnement et le néant des êtres mathématiques brusquement s'imposent. Les personnages se contaminent et se brouillent, une profondeur secrète les attire. Tel un flocon de neige qui flotte dans le vent, sous un ciel bleu-noir, dans l'air du soir, suspendu, hésitant, ils perdent leur contour absorbé par le style. Ces héros, ces visions, fruits d'une imagination dont le chercheur sait qu'elle est son seul organe pour jouir de la beauté, finissent par nous laisser un goût, un seul, âcre et tonique : le goût de l'expérience mathématique. Du défi intellectuel comme thérapie, comme *enchantement* (j'entends par là, un ravissement).

Ce que je fais comme chercheur, a un rapport avec la répétition. Mais la répétition ne signifie pas réitération uniforme du toujours identique. Au contraire, elle ramène ce qui en retrait s'abrite dans l'ancien.

Les questions qui sont posées ici, sont certes, pour ceux qui sont blasés, choses du passé. Mais pour une certaine idée de la science, si nous l'éprouvons comme ce qui nous est destiné, elles demeurent toujours et elles demeureront toujours un présent nouveau : quelque chose qui attend de nous que nous allions en pensant à leur rencontre, et que nous mettions par-là à l'épreuve notre propre pensée et notre propre création artistique. Car le commencement d'un destin est ce qu'il y a de plus grand. Il tient d'avance tout ce qui vient après lui sous sa puissance.

Les exercices proposés dans ce fascicule, sont lisibles (et drôles, et percutants, et riches, et remuant des tas de choses dans toutes les directions — ce qui est le propre de la Mathématique), si vous rétablissez en vous-même, dans votre œil ou votre oreille, la bonne cadence.

La Mathématique nous enseigne la pensée rapide, mais inversement, elle nous oblige peut-être à lire plus lentement. Devant un exercice, il appartient à chaque lecteur d'établir un nouveau rythme, un nouveau tempo. La vitesse nous donne la lenteur, seul un esprit très rapide peut savourer la lenteur. Les Mathématiques ne se lisent pas à la même vitesse qu'un roman par exemple.

De la vitesse de lecture, dépendent beaucoup de choses en Mathématique. Cette discipline nous apprend à mieux voir. On ne voit pas avec ses yeux (ou seulement un peu), mais avec les concepts, sa langue, son oreille, sa mémoire des mots (peut-être aussi bien son odorat). Sans énonciation, pas d'éveil de l'image mentale. Engendrés par des textes, donc, les concepts engendrent eux-mêmes des théories, à l'infini, comme dans une énumération de générations bibliques. Le concept, parfois, c'est comme un métronome bloqué ; défaites le corset, le sens explose ; c'est plus lent à lire, parce que c'est plus riche ; et parce que c'est plus lent, paradoxalement, ça brûle les étapes.

Les Mathématiciens s'obstinent à utiliser les symboles, qui sont aux yeux du profane du chinois — Précisément : on pourrait leur faire crédit et penser que cette obstination veut dire quelque chose : qu'elle nous communique la tension, l'éblouissement et le péril d'un grand projet, d'un projet d'une autre taille (le contenu des théories, comme la vitesse de leur lecture, ça fait partie de leur sens).

Ouverte, la forme de ce fascicule se dévoile hors commencement et fin, car, partout et sans dommage, on peut entamer une lecture, partout on peut refermer le fascicule. La chronologie qu'implique le volume, son déroulement avec un début, un milieu et une fin, peuvent être mis à mal par le désir de se promener d'une question à l'autre.

Qu'enseigne-t-on en Mathématiques ? Toujours la vivacité, la pensée rapide, l'allégresse, l'élec- tricité de son langage, « l'histoire d'amour entre les scientifiques et leurs théories » avec ses «sensations savantes », la conviction qu'une renaissance par le théorème peut advenir. Toujours le lien étroit du langage conceptuel avec le corps du scientifique, sujet trop négligé. Toujours le rejet du simplisme, du défaitisme, du moutonnement, du confort ambiants. Toujours la quête (elle peut avoir bien des visages) d'une vérité mathématique, d'une « responsabilité à accepter l'abstraction ». Si bien que, phénomène fréquent en matière de critique pédagogique, chaque résolution est un autoportrait.

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Un Exercice *qui fait appel à la pensée pure comme faculté des essences.*

Peut-on trouver un équivalent quand $n \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(\ln n)x^n$?

Rose de série entière, ô contradiction, volupté de n'être le sommeil de personne sous tant de paupières. Ô suites perpétuelles / de la liesse éternelle, qui faites / Qu'en un parfum je sens tous les parfums. Donne-moi un rayon de convergence infini. Je connais le corps de réels semblable à un talus où s'épanouissent une fonction indéfiniment dérivable, deux lemmes démontrables et quelques intégrales riemanniennes.

La résolution de cet exercice passe par un troisième œil qui n'a pas seulement l'ardeur de la braise, mais traverse aussi la nuit et rend visible ce qui serait dans l'invisible. Ce regard préalable désigne l'éclat rayonnant de la mer, des astres, de la lune, mais aussi le chatoiement de l'olivier. Ce troisième œil est l'œil qui éclaire et resplendit.

Ma solution : *Les couleurs, les sons, les goûts, les parfums des équations, se répondent. Chaque épisode est décisif, le moindre déplacement de jeu, comme aux échecs, a une histoire apparente et secrète. Lemmes, intégrales, séries normalement convergentes, limites clignotant à l'infini, équivalences et fonctions continues sur un compact participent d'une même énergie créatrice, chaque concept se nourrissant des autres.*

Notons f la fonction à étudier. Montrons que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -\ln(\ln x)$.

1° Une expression sous forme intégrale pour $f'(x) + f''(x)$.

Comme la série $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}(\ln n)x^n$ a un rayon de convergence infini, f est définie sur $\mathbb{R}$ et est indéfiniment dérivable terme à terme, et on a :

$$f'(x) + f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)x^n.$$

Lemme 1 _ *Soit* $b > a > -1$ *et soit* A *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\ln t}\,dt$. *Alors* $\mathrm{A} = \ln\left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)$.

Preuve

$$\mathrm{A} = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \mathrm{A}(\varepsilon) \text{ avec } \mathrm{A}(\varepsilon) = \int_0^1 \left(\int_a^b \frac{t^u}{1}\,du\right)dt.$$

Comme $(t, u) \longmapsto t^u$ est continue sur $[\varepsilon, 1] \times [a, b]$, on peut intervertir les deux symboles intégrales dans cette expression de $\mathrm{A}(\varepsilon)$, ce qui donne :

$$\mathrm{A}(\varepsilon) = \int_a^b \frac{1 - \varepsilon^{u+1}}{u+1}\,du.$$

Comme $0 < \displaystyle\int_a^b \frac{\varepsilon^{u+1}\,du}{u+1} < \frac{(b-a)\,\varepsilon^{u+1}}{a+1}$, on a $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} A(\varepsilon) = \int_a^b \frac{du}{u+1}$, ce qui donne le résultat souhaité.

Notons ψ l'application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \psi(t) = \dfrac{t-1}{\ln t} \quad \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \& \\ \psi(0) = 0 \\ \& \\ \psi(1) = 1 \end{cases},$$

Alors ψ est continu sur $[0, 1]$ et $\forall\, t,\ 0 \leq \psi(t) \leq 1$.

Pour $x < 1$ fixé, posons $u_n(t) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n\, t^n\, \psi(t)$.

On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{u_n(t)}{1}\,dt = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = -\,e^{-xt}\psi(t)$.

Sur $[0, 1]$ la série $u_n(t)$ converge normalement et on peut donc l'intégrer terme à terme ; il en résulte $f'(x) + f''(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}\psi(t)}{1}\,dt$.

2° _ Un équivalent en $+\infty$ de $f' + f''$.

Soit a quelconque dans $]0, 1[$. On partage l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}\psi(t)}{1}\,dt = H_a(x) + L_a(x) \quad \text{avec} \begin{cases} H_a(x) = \displaystyle\int_0^a \frac{e^{-xt}\psi(t)}{1}\,dt \\ \& \\ L_a(x) = \displaystyle\int_a^1 \frac{e^{-xt}\psi(t)}{1}\,dt \end{cases}.$$

Posons $\mathrm{I}_a(x) = \int_0^a e^{-xt}\left(-\dfrac{1}{\ln t}\right) dt$. Alors $(1-a)\,\mathrm{I}_a(x) < \mathrm{H}_a(x) < \mathrm{I}_a(x)$.

Par ailleurs $0 < \mathrm{L}_a(x) < \dfrac{1}{x} e^{-ax}$.

Étudions maintenant $\mathrm{I}_a(x)$.

Lemme 2 _ $\mathrm{I}_a(x) \sim \dfrac{1}{x \ln x}$ *quand* $x \longrightarrow +\infty$ (*pour tout* a).

Preuve :

On introduit

$$\mathrm{J}_a(x) = \int_0^a \frac{e^{-xt}\,dt}{\ln x} = \frac{1 - e^{-ax}}{x \ln x}.$$

On a

$$\mathrm{J}_a(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x}.$$

Écrivons $\mathrm{I}_a(x) - \mathrm{J}_a(x) = -\displaystyle\int_*^a \frac{e^{-xt}\ln(xt)\,dt}{\ln t \ln x}$, qui se transforme par le changement

de variable $u = xt$, en $\dfrac{1}{x \ln x}\,\mathrm{K}_a(x)$ avec $\mathrm{K}_a(x) = \displaystyle\int_0^{ax} \frac{e^{-u}\ln u\,du}{\ln x - \ln u}$.

On coupe en trois morceaux cette intégrale en introduisant α, β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$

et on suppose $x > \dfrac{\beta}{a}$.

Sur $[0\,;\alpha]$ on a

$$0 < \frac{e^{-u}\ln u}{\ln x - \ln u} < 1, \text{ d'où } \left|\int_0^{\alpha} \frac{e^{-u}\ln u\,du}{\ln x - \ln u}\right| < \alpha.$$

Sur $[\beta, ax]$

$$\text{on a } \frac{1}{\ln x - \ln u} \leq \frac{1}{\ln \frac{1}{a}},$$

d'où

$$\left|\int_{\beta}^{ax} \frac{e^{-u}\ln u\,du}{\ln x - \ln u}\right| < \frac{1}{\ln \frac{1}{a}} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{e^{-u}\ln u}{1}\,du.$$

Soit $\varepsilon > 0$; fixons $\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et β tel que $\displaystyle\int_{\beta}^{+\infty} \frac{e^{-u}\ln u}{1}\,du \leq \frac{\varepsilon}{3}\ln\frac{1}{a}$; comme on a

$\displaystyle\left|\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-u}\ln u\,du}{\ln x - \ln u}\right| \leq \frac{K}{\ln x - \ln \beta}$ (pour un certain K), on peut choisir $X > \frac{\beta}{a}$ tel que

$$\forall\, x > X, \left|\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-u}\ln u\,du}{\ln x - \ln u}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où

$$\forall\, x > X, \ \left|K_a(x)\right| \leq \varepsilon.$$

On a montré que $I_a(x) - J_a(x) \ll \dfrac{1}{x\ln x}$, et comme $J_a(x) \sim \dfrac{1}{x\ln x}$,

on a bien $I_a(x) \sim \dfrac{1}{x\ln x}$.

Exprimons à présent l'équivalent de $f' + f''$.

Soit $\varepsilon > 0$; prenons $a \leq \varepsilon$; alors $\left|\mathrm{H}_a(x) - \mathrm{I}_a(x)\right| \leq \varepsilon \mathrm{I}_a(x)$.

On a

$$\mathrm{I}_a(x) \sim \frac{1}{x \ln x} \text{ et } \mathrm{L}_a(x) \ll \frac{1}{x \ln x}.$$

Soit donc X tel que

$$\forall\, x > \mathrm{X}, \quad \left|\mathrm{I}_a(x) \sim \frac{1}{x \ln x}\right| < \frac{\varepsilon}{x \ln x} \text{ soit } \left|\mathrm{L}_a(x)\right| < \frac{\varepsilon}{x \ln x},$$

d'où

$$\forall\, x > \mathrm{X}, \quad \left|f'(x) + f''(x) + \frac{1}{x \ln x}\right| < \frac{\varepsilon(3+\varepsilon)}{x \ln x}$$

et on a bien montré

$$f'(x) + f''(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x \ln x}.$$

3° _ Équivalent de f.

Comme $\dfrac{1}{x \ln x}$ a un signe constant pour $x > 1$ et comme $\displaystyle\int_*^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ diverge, on a

$f(x) + f'(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -\ln(\ln x)$.

D'autre part, comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \{f(x) + f'(x)\} = 0$, un exercice classique montre que

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Donc $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -\ln(\ln x)$.

Exercice : *Rien ne m'est plus sûr que la chose incertaine.* _ Trouver la partie principale de $\sum_{q=0}^{n} C_{2n^2}^{n^2+q}$.

Nous avons tous besoin, pour rendre la réalité supportable, d'entretenir en nous quelques petites folies.

Les « petites folies » dont je parle, ce sont donc ces espoirs nécessaires qui nous permettent de croire en des temps meilleurs, et de continuer à mathématiser. Et c'est un exemple, parmi d'autres, du besoin de rêve d'un chercheur en quête du graal...

Comme nous aimerions, dans nos considérations, éviter l'arbitraire de l'inspiration, nous demandons ici, à Bernoulli, conseil et assistance de son théorème. Nous ne pouvons certes pas épuiser, dans le cadre restreint de cet exercice, la plénitude des connaissances en probabilité. Nous ne faisons que reconnaître ce que le théorème de Bernoulli de convergence vers la loi normale nous dit de la provenance d'une intégrale singulière.

Face à un exercice ardu ou à une réalité qui ne cesse d'être décevante, le chercheur qui n'aime que des valeurs positives, semble avoir trouvé la parade idéale : jamais pleinement endormi, ni totalement réveillé, il joue avec les frontières de l'imaginaire.

Ma solution : *Laissons deviner. Le langage Mathématique, comme la musique, se développe aussi entre les idées, leurs intervalles, leurs chocs de surprises. C'est un corps qui, pris à même la vie du passé, sera toujours là.*

Il s'agit d'une question très classique dans le calcul des probabilités.

Si on pose $2n^2 = N$, la suite cherchée, S_n, est

$$S_n = \sum \left\{ C_N^{\,k} \;/\; \frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N}{2}} \right\},$$

$2^{-N} S_n$ est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X_N suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et N ($X_N = x_1 + \ldots + x_N$ où les x_i sont de Bernoulli, élémentaires, avec $P_2\{x_i = 0\} = P_2\{x_i = 1\} = \frac{1}{2}$, et indépendantes), soit comprise entre $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N}{2}}$.

Comme X_N est d'espérance $\frac{N}{2}$ et d'écart-type $\frac{\sqrt{N}}{2}$, d'après le théorème de convergence de la loi de Bernoulli vers la loi normale, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} P_2\left\{\frac{a\sqrt{N}}{2} \leq X_N - \frac{N}{2} \leq \frac{b\sqrt{N}}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b \frac{e^{-t^2/2}}{1} dt.$$

Donc ici

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{-2n^2} S_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{-t^2/2}}{1} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1} dt,$$

Soit

$$S_n \sim \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1} dt.$$

Je vais prouver « *taupinalement* » ce résultat :

Posons

$$\begin{cases} S_n = \binom{2n^2}{n^2} A_n \\ avec \\ A_n = \sum_{q=0}^{n} a_{n,q} \end{cases},$$

précisons que

$$a_{n,\,q} = \frac{\displaystyle\prod_{l=1}^{q-1}\left(1 - \frac{l}{n^2}\right)}{\displaystyle\prod_{l=1}^{q}\left(1 + \frac{l}{n^2}\right)}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout t tel que :

$$|t| \leq \eta, \quad \left|\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}\right| \leq t^2\,\varepsilon.$$

On prend $n \geq \dfrac{1}{\eta}$; comme ici $0 < l \leq q \leq n$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \eta$,

d'où

$$\left|\ln\left(1 - \frac{l}{n^2}\right) + \frac{l}{n^2} + \frac{l^2}{2n^4}\right| \leq \frac{l^2}{n^4}\,\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{n^2},$$

Puis

$$\left|\sum_{l=1}^{q-1} \ln\left(1 - \frac{l}{n^2}\right) + \frac{q(q-1)}{2n^2} + \frac{q(q-1)(2q-1)}{12n^4}\right| \leq \frac{\varepsilon(q-1)}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{n},$$

soit

$$\left|\sum_{l=1}^{q-1} \ln\left(1 - \frac{l}{n^2}\right) + \frac{q^2}{2n^2} - \frac{q}{2n^2} + \frac{q^3}{6n^4}\right| \leq \frac{\varepsilon}{n} + \frac{3q^2 - q}{12n^4} \leq \frac{2\varepsilon}{n},$$

en décidant de prendre également $n \geq \dfrac{1}{4\varepsilon}$.

De même,

$$\left|\sum_{l=1}^{q} \ln\left(1 + \frac{l}{n^2}\right) - \frac{q^2}{2n^2} - \frac{q}{2n^2} < \frac{q^3}{6n^4}\right| \leq 2\,\frac{\varepsilon}{n},$$

et par différence

$$\left| \ln a_{n,\,q} + \frac{q^2}{n^2} \right| \leq 4\,\frac{\varepsilon}{n}\,.$$

Pour $|u| \leq 1$ (par exemple), on a

$$\left| e^u - 1 \right| \leq \mathrm{K} |u|$$

où K est une certaine constante > 0. On prendra $n \geq 4\varepsilon$ (en plus des autres conditions) ; donc

$$e^{-4\varepsilon/n} \leq a_{n,\,q}\, e^{q^2/n^2} \leq e^{4\varepsilon/n},$$

puis

$$\left| a_{n,\,q}\, e^{q^2/n^2} - 1 \right| \leq 4\mathrm{K}\frac{\varepsilon}{n},$$

soit

$$\left| a_{n,\,q} - e^{-q^2/n^2} \right| \leq 4\mathrm{K}\varepsilon \frac{1}{n} e^{-q^2/n^2} \leq \frac{4\mathrm{K}\varepsilon}{n}\,.$$

En sommant

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^{n} a_{n,\,q} - \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^{n} e^{-q^2/n^2} \right| \leq \frac{4\mathrm{K}\varepsilon}{n}\,,$$

et comme

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^{n} e^{-q^2/n^2} \quad \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1}\, dt$$

(c'est une somme de Riemann)

on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^{n} a_{n,\,q} = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1}\, dt.$$

Remarque : on a même $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{q=0}^{n} a_{n,\,q} - \sum_{q=0}^{n} e^{-q^2/n^2} \right) = 0.$

D'après le résultat classique $C_{2n}^{n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ (intégrale de Wallis), on obtient

$$S_n \sim (n+1)\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1}\,dt\,\frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi n^2}} \sim \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1}\,dt.$$

Exercice : *Il y a tant d'aurores qui n'ont pas encore luit.*

Étudier pour tout $u_0 > 0$ et tout $a > 0$, la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{a + (-1)^n u_n}$.

Nous méditons l'existence d'une telle suite. Nous tentons de jeter un regard dans ce domaine qui, avant toute formulation séquentielle, exerce déjà sa puissance et qui seul accorde aux suites des nombres ce qui font d'elles ce qu'elles sont.
« Le seul véritable voyage ce ne serait pas d'aller vers d'autres paysages, mais d'avoir d'autres yeux. »

Cette phrase qu'on trouve intégralement au 5ème tome de *À la recherche du temps perdu*, de Marcel Proust, dans *La Prisonnière*, s'est imposée à moi, en même temps que j'écoutais *Ave, verum corpus* de Wolfgang Amadeus Mozart. C'est la première fois que j'écoute cette musique. Et à la manière de la sonate pour Swann, elle me transporte « en pays inconnu » et me fait ressentir intensément la réalité.
Le musicien Mozart, insistant, mélodieux, d'une douceur inexorable, parvient ainsi à me faire « voyager », à me faire percevoir l'univers autrement : il me donne « d'autres yeux ». Il s'agit là du sens figuré de la vision.

Mais les yeux servent évidemment et avant tout à ''voir'', à regarder, à scruter, et même à « radiographier » le réel. Et le chercheur, tout au long de sa pratique, se délecte de cette activité...

Le chœur apaisé qu'avait exhalé la musique de Mozart, me désignait un monde dont je n'étais pas le centre mais dont l'humain est le centre. Mozart exprimait une attention des hommes pour les hommes, un souci quant à notre vulnérabilité, notre condition mortelle.

Dans la nuit obscure de l'automne et de la chair, cette musique nous rappelait que nous étions frères en fragilité. Mozart me révélait qu'il y avait un univers purement humain, établissant ses propres fêtes, ses règles, ses croyances, ses rendez-vous où les voix s'enlacent en harmonie pour délivrer une beauté qui ne peut naître que de l'accord, de l'entente, au prix d'une recherche commune, d'un but consenti, d'une émotion partagée ... Surgissait un monde parallèle à la nature, celle-là même que le gel, le froid, la nuit pouvaient anéantir. Un univers inventé, le nôtre. Cet univers-là, par sa musique, il le reflétait, il le dessinait. Peut-être le créait-il ?

Ma solution : *Notre pratique des Mathématiques est un chemin dans les sables, où l'on doit se conduire par l'étoile du Nord plutôt que par les vestiges qu'on y voit imprimés. La confusion des traces qu'un nombre presque infini d'interprétations erronées y ont laissées est si grande, et on y trouve tant de différents sentiers qui mènent presque tous dans des déserts affreux, qu'il est presque impossible de ne pas s'égarer de la véritable voie que les seuls théoriciens avisés ont heureusement su démêler et reconnaître.*

On montre que :

1° _ Si $0 < a < 1$, la suite (u_n) n'est pas définie pour $n \geq 2$ quel que soit le choix de u_0.

2° _ Si $1 \leq a \leq \frac{5}{4}$, sauf pour un choix unique $u_0 = \alpha$, la suite (u_n) n'est pas définie à partir d'un certain rang ; pour $u_0 = \alpha$, on a , pour tout n, $\begin{cases} u_{2n} = \alpha \\ \& \\ u_{2n+1} = \sqrt{a + \alpha} \end{cases}$

3° _ Si $\frac{5}{4} < a \leq \mathrm{A}$, avec $\mathrm{A} = 1,310\,702\,64\ldots$, il existe trois réels α, β, γ tels $0 \leq \beta < \alpha < \gamma$ et :

a) Si $\beta < u_0 < \gamma$, alors u_{2n} tend vers α et u_{2n+1} vers $\sqrt{a + \alpha}$;

b) Si $u_0 = \beta$ ou γ, la suite (u_n) est de période 4 avec pour valeurs successives $(\beta, \sqrt{a + \beta}, \gamma, \sqrt{a + \gamma})$;

c) Si $0 \leq u_0 < \beta$ ou $u_0 > \gamma$, la suite (u_n) n'est pas définie à partir d'un certain rang.

4° _ Si $a > \mathrm{A}$, prenant u_0 dans le segment $[0, a^2 - a]$ (sinon la suite (u_n) n'est pas définie à partir de $n = 2$), pour un certain α, u_{2n} tend vers α et u_{2n+1} tend vers $\sqrt{a + \alpha}$.

On introduit $f : x \longmapsto \sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ et on note I_a l'ensemble des x positifs tels que f est définie en x.

La suite (u_{2n}) est donnée par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I}_a \\ \& \\ u_{2n} = f(u_{2n-2}) \end{cases}$.

Les énoncés ci-dessus font intervenir un point fixe α de f et un doublet (β, γ) de f, c'est-à-dire un couple (β, γ) tel que $\beta < \gamma$, $f(\beta) = \gamma$ et $f(\gamma) = \beta$.

Si $a < 1$, alors I_a est $\varnothing$; on en déduit le 1°.

Désormais $a \geq 1$; on a $\begin{cases} \mathrm{I}_a = [0,\ a^2 - a] \\ \& \\ f(\mathrm{I}_a) = \left[0,\ \sqrt{a - \sqrt{a}}\right] \end{cases}$;

donc I_a est stable par f si, et seulement si, $\sqrt{a - \sqrt{a}} \leq a^2 - a$, ce qui équivaut à $a \geq \mathrm{A}$ où A est l'unique racine de l'équation en a (> 1) : $\sqrt{a - \sqrt{a}} = a^2 - a$,

soit encore (1) $a\sqrt{a}\,(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)^2 - 1 = 0.$

On trouve A = 1,310 702 64 …

Si la suite (u_{2n}) converge, c'est, bien sûr, vers un point fixe de f. Or, f étant

décroissante, avec $\begin{cases} f(0) = \sqrt{a - \sqrt{a}} \\ \& \\ f(a^2 - a) = 0 \end{cases}$,

donc $f(0) > 0$ et $f(a^2 - a) < a^2 - a$ (pour $a > 1$), f admet un unique point fixe α ; on trouve α comme racine de $(\alpha^2 - a)^2 = \alpha + a$ avec $0 < \alpha < \sqrt{a}$, ce qui revient à

$$\text{(2)} \qquad \alpha^2 + \alpha + 1 = a,$$

soit

$$\text{(3)} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\,(\sqrt{4a - 3} - 1).$$

Si la suite (u_{2n}) est partout définie et ne converge pas, la fonction f étant décroissante, les suites (u_{4n}) et (u_{4n+2}) sont monotones bornées et convergent vers les deux éléments d'un doublet de f.

Cherchons donc les éventuels doublet de f, c'est-à-dire les couples (β, γ) tels que :

$$0 \leq \beta < \gamma, \quad f(\beta) = \gamma \quad \text{et} \quad f(\gamma) = \beta.$$

On résout donc $\begin{cases} \sqrt{a - \sqrt{a + \beta}} = \gamma \\ \& \\ \sqrt{a - \sqrt{a + \gamma}} = \beta \\ \textit{avec} \\ 0 \leq \beta < \gamma \end{cases}$

soit
$$\begin{cases} \beta = (a - \gamma^2)^2 - a \\ \& \\ \gamma = (a - \beta^2)^2 - a \\ \text{avec} \\ 0 \leq \beta < \gamma < \sqrt{a} \end{cases}.$$

On pose $s = \beta + \gamma$ et on obtient après calculs

$$(4) \qquad a = \frac{s}{s^2 - 1} + \frac{1}{4s^2} + \frac{1 + s^2}{4}$$

On trouve aussi

$$p = \beta\gamma = -\frac{s^2 + 1}{2(s^2 - s)} + \frac{1}{4}\left(s^2 - 1 - \frac{1}{s^2}\right)$$

Exprimant que l'équation $x^2 - sx + p = 0$ a deux racines réelles distinctes dans $[0, \sqrt{a}[$, on trouve les conditions
$$\begin{cases} s > 0 \\ \& \\ s^2 + \dfrac{2}{s} < 4a \leq \operatorname{Inf}\left\{2s^2 + \dfrac{2}{s}, \left(\dfrac{1}{s^2} + s\right)^2\right\} \end{cases}.$$

On utilise la définition de a, par (4), en fonction de s.

Pour $s > 1$, on a

$$2s^2 + \frac{2}{s} - \left(\frac{1}{s^2} + s\right)^2 = \frac{s^6 - 1}{s^4} > 0;$$

et la condition nécessaire $\left(\dfrac{1}{s^2} + s\right)^2 - 4a \geq 0$ revient à

$$\frac{1 - s^2 - s^4}{s^4} - \frac{2(1 + s^2)}{s(s^2 - 1)} \geq 0,$$

et c'est impossible. On a donc l'existence de (β, γ) si, et seulement si,

$$\begin{cases} 0 < s < 1 \\ \& \\ s^2 + \dfrac{2}{s} < 4a \leq 2s^2 + \dfrac{2}{s} \end{cases}$$

On a

$$4a - s^2 - \frac{2}{s} = \frac{1}{s^2(1-s^2)}\left\{(1-s^2)(1-s)^2 - 4s^2\right\},$$

d'où la condition $4s^2 < (1-s^2)(1-s)^2$, qui se ramène sur $]0, 1[$, après simplification, à

$$s < \sqrt{2} - 1.$$

Pour $s = \sqrt{2} - 1$, l'équation $x^2 - sx + p = 0$ a une racine double:

$$\begin{cases} \beta = \gamma = \alpha = \dfrac{s}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \& \\ a = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} 2s^2 + \dfrac{2}{s} - 4a = \dfrac{P(s)}{s^2(1-s^2)} \\ \textit{avec} \\ P(s) = -s^6\ 2s^4 + 2s^3 + 2s - 1 \end{cases}$$

On vérifie aisément que P est convexe, puis croissante sur $[0, \sqrt{2} - 1]$; comme

$$P(\sqrt{2} - 1) = 58\sqrt{2} - 82 = \frac{2}{29\sqrt{2} + 41} > 0,$$

P a un et un seul zéro, noté S sur $[0, \sqrt{2} - 1]$. Pour $s = S$, on a $p = 0$, donc $\beta = 0$ et $\gamma = s$ et $a = A$.

La relation (4) s'exprime par $a = \varphi(s)$, avec $\varphi'(s) = -\dfrac{1+s^2}{(1-s^2)^2} - \dfrac{1}{2s^2}(1-s^4) < 0$;

donc φ est strictement monotone sur $]0, 1[$ et en particulier sur $[S, \sqrt{2} - 1]$, si bien que la correspondance $a \longrightarrow s$ est une bijection de $\left[\dfrac{5}{4}, A\right]$ sur $[S, \sqrt{2} - 1]$.

Donc pour tout a vérifiant $\dfrac{5}{4} < a \leq A$, il existe un et un seul doublet (β, γ) de f avec $0 \leq \beta < \alpha < \gamma$.

Si $a > A$, la suite (u_{2n}) n'a donc pas deux valeurs d'adhérences et elle est partout définie ; elle converge donc vers α et on en déduit 4°.

Si $a \leq A$ et $a \geq 1$, on a $\sqrt{a - \sqrt{a}} \geq a^2 - a$, si bien que l'intervalle $J = \left[0, \sqrt{a - \sqrt{a}}\right]$ est stable par l'application réciproque g de f : $g(y) = (a - y^2)^2 - a$. Comme g est décroissante, la m-ième image $J_m = g^m(J)$ est l'ensemble de points situés entre c_{m-1} et c_m, avec $c_0 = 0$, $c_m = (a - c^2_{m-1})^2 - a$; si on prend u_0 dans J_m, alors la suite (u_n) est définie jusqu'à $n = 2m$; pour que la suite (u_n) soit partout définie, il faut et il suffit que u_0 soit dans

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} J_m = [\beta', \gamma'] \quad \text{où} \quad \beta' = \lim_{n \to +\infty} (c_{2m}), \qquad \gamma' = \lim_{m \to +\infty} (c_{2m+1}) ;$$

en effet, comme g est décroissante, les suites (c_{2m}) et (c_{2m+1}) sont respectivement croissante et décroissante, et bornées. On a $\begin{cases} g(\beta') = \gamma' \\ \& \\ g(\gamma') = \beta' \end{cases}$

et, par suite, $\begin{cases} f(\beta') = \gamma' \\ \& \\ f(\gamma') = \beta' \end{cases}$

Si a est dans $\left[1, \frac{5}{4}\right]$, alors nécessairement $\beta' = \gamma' = \alpha$; donc la suite (u_n) n'est définie que si $u_0 = \alpha$; on en déduit le 2°.

Si $\frac{5}{4} < a \leq A$, l'intervalle $[\beta, \gamma]$ vérifie $f([\beta, \gamma]) = [\beta, \gamma]$ donc $g([\beta, \gamma]) = [\beta, \gamma]$; on a donc $[\beta, \gamma] \subset [\beta', \gamma']$, comme f n'a qu'un doublet, on a $\beta' = \beta$ et $\gamma' = \gamma$. On en déduit 3° *c*). Le 3° *b*) est immédiat.

Donc, toujours si $\frac{5}{4} < a \leq A$, la suite (u_n) est définie si, et seulement si, u_0 est dans $[\beta, \gamma]$; prenons u_0 dans $]\beta, \gamma[$, et vérifions 3°*a*), ce qui revient à montrer que $u_{2n} \longrightarrow \alpha$.

Utilisons pour cette dernière question la fonction $h = f \circ f - \mathrm{I}d : x \longmapsto f(f(x)) - x$, définie sur $[\beta, \gamma]$. Cette fonction s'annule en β, α, γ et seulement en ces points ; elle a donc un signe constant sur $]\beta, \alpha[$ et sur $]\alpha, \gamma[$; on a $f'(\alpha) = -\frac{1}{4\alpha\sqrt{a+\alpha}}$; comme

$a = \alpha^2 + \alpha + 1$,

on a

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{4\alpha(\alpha+1)} = -\frac{1}{4(a-1)}$$

et

$$0 > f'(\alpha) > -1 \text{ car } a > \frac{5}{4}.$$

Donc, $h'(\alpha) = f'(\alpha^2) < 0$ et il en résulte immédiatement,

$$\begin{cases} h > 0 \text{ sur }]\beta, \alpha[\text{ si } u_0 \in]\beta, \alpha[\\ \& \\ h < 0 \text{ sur }]\alpha, \gamma[\text{ si } u_0 \in [\alpha, \gamma[\end{cases}$$

alors $f[f(u_0)] = u_4 \geq u_0$ car $h(u_0) \geq 0$ (resp. $u_4 \leq u_0$) et la suite (u_{4n}) est croissante (resp. décroissante) donc $u_{4n} \nearrow \beta''$ avec $\beta < \beta'' \leq \alpha$ (resp. $u_{4n} \searrow \gamma''$ avec $\alpha \leq \gamma'' < \gamma$) ; comme β'' (resp. γ'') est un point fixe de $f \circ f$, c'est un zéro de h, et $\beta'' = \alpha$. Le résultat voulu vient immédiatement et la preuve est complète.

Cet Exercice *respire, et est modelé comme un souffle*. _ Soit n un entier naturel. Calculer le maximum du produit :

$$\prod_{0 \leq k < l \leq n+1} \left\{ x_l - x_k / 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1 \right\}$$

Tâchons de toujours garder un morceau de ciel au-dessus de notre vie.

Ce précieux conseil m'est donné par ma voix intérieure, en soliloquant. Et ce « morceau de ciel » qu'elle m'intime de garder, c'est justement ce qui pourra me préserver de la violente réalité, ce qui me permettra de conserver ma « jolie âme ».

Ce que me suggère en fait ma voix intérieure, c'est de garder une porte ouverte sur l'imaginaire... Essayons de comprendre comment elle se construit au travers de l'écriture mathématique.

Que signifie donner conseil ? Cela veut dire : préméditer quelque chose, y pourvoir d'avance et par là faire qu'elle réussisse. De ce fait cette voix règne partout où les hommes produisent quelque chose, mettent au jour quelque chose, la mènent à bonne fin, mettent en œuvre, agissent et font.

Ma réponse : *La démonstration Mathématique est une ruche de marbre vers laquelle les concepts se pressent en tourbillonnant. Le temps de la résolution revient, bien qu'enseveli, il est pourtant là, au milieu de nous, approché, coudoyé, palpé, immobilisé, au soleil. J'aimerais dire, tranquillement, que chacun de nous – à condition de travailler sérieusement – peut désormais pouvoir arrêter le soleil.*

La réponse est M_n où M_n est tel que

$$\mathrm{M}_n^{\ 2} = \frac{\left\{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n\right\}^2 (n+1)^{n+1} (n+2)^{n+2}}{2^{(n+1)(n+2)} 1^1 3^3 \ldots (2n+1)^{2n+1}},$$

ou encore

$$\begin{cases} M_0 = 1 \\ \left(\dfrac{M_n}{M_{n-1}}\right)^2 = \dfrac{n^n(n+2)^{n+2}}{4^{n+1}(2n+1)^{2n+1}} \\ M_1 = \dfrac{1}{4} \\ M_2 = \dfrac{1}{25\sqrt{5}} \\ M_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{(16.7^3\sqrt{7})} \\ \text{etc...} \end{cases}$$

L'étude est assez longue et je vais la séparer en plusieurs étapes.

1° _ Soit D la partie de $\mathbb{R}^n$ dont les éléments sont les $(x_1, \dots, x_n)$ tels que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1.$$

Soit F l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $(x_0 = 0, x_1 = 1)$:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod \left\{x_j - x_i \,/\, 0 \leq i < j \leq n+1\right\}.$$

Alors F est continue sur le compact D, donc F atteint sa borne supérieure M_n.

Tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ tel que

$$F(x_1, \dots, x_n) = M_n$$

vérifie évidemment

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1,$$

c'est-à-dire qu'il est intérieur à D. Comme F est $\mathscr{C}^1$, un tel point est un point critique de F.

Dans le 3° je montrerai que F a au plus un point critique, il en résultera alors sans réciproque que ce point est le seul où F atteint son maximum.

2° _ Dans l'anneau $K[X_1, \dots, X_n]$ notons σ_k le polynôme symétrique élémentaire de degré k, $\sigma_k(\overline{X_i})$ le polynôme symétrique élémentaire de degré k du sous-anneau $K[X_1, \dots, \overline{X_i}, \dots, X_n]$ obtenu à partir de $K[X_1, \dots, X_n]$ par suppression de l'indéterminée X_i, notons aussi $\sigma_k(\overline{X_i}\ \overline{X_j})$ $(i \neq j)$ le polynôme symétrique élémentaire de degré k du sous-anneau $K[X_1, \dots, \overline{X_i}, \dots, \overline{X_j}, \dots, X_n]$.

En dénombrant les occurrences de chaque monôme, on montre aisément les formules :

$$\sigma_k(\overline{X_i}) = \sigma_k(\overline{X_i}\ \overline{X_j}) + X_j\sigma_{k-1}(\overline{X_i}\ \overline{X_j}) \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_k(\overline{X_i}) = (n-k)\,\sigma_k$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\sigma_k(\overline{X_i}) = (k+1)\,\sigma_k$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_k(\overline{X_i}\ \overline{X_j}) = C^2_{n-k}\sigma_k$$

$$\sum_{i \neq j} X_i\sigma_k(\overline{X_i}\ \overline{X_j}) = (k+1)(n-k-1)\sigma_{k+1}$$

$$\sum_{i<j} X_iX_j\sigma_k(\overline{X_i}\ \overline{X_j}) = C^2_{k+2}\sigma_{k+2}.$$

3° _ Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un point critique de F. Alors on a, pour $i = 1, 2, \dots, n$,

$$0 = \frac{1}{\mathrm{F}}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} = \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{2x_i - 1}{x_i(x_i - 1)} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Multiplions par $x_i(x_i - 1)\,\sigma_k(\overline{x_i})$ et ajoutons membre à membre :

$$0 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i\sigma_k(\overline{x_i}) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_k(\overline{x_i}) + \sum_{i\neq j}\frac{(x_i^2 - x_i)\sigma_k(\overline{x_i})}{x_i - x_j}$$

$$= 2(k+1)\,\sigma_{k+1} - (n-k)\,\sigma_k + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{(x_i^2 - x_i)\sigma_k(\overline{x_i}) - (x_j^2 - x_j)\,\sigma_k(\overline{x_j})}{x_i - x_j}$$

Remplaçons

$$\sigma_k(\overline{x_i}) \quad \text{par} \quad \sigma_k(\overline{x_i}\ \overline{x_j}) + x_j\,\sigma_{k-1}(\overline{x_i}\ \overline{x_j})$$

$$\sigma_k(\overline{x_j}) \quad \text{par} \quad \sigma_k(\overline{x_i}\ \overline{x_j}) + x_i\sigma_{k-1}(\overline{x_i}\ \overline{x_j})\,;$$

le numérateur précédent devient

$$(x_i - x_j)\,[(x_i + x_j - 1)\,\sigma_k(\overline{x_i}\ \overline{x_j}) + (x_i\,x_j)\sigma_{k-1}(\overline{x_i}\ \overline{x_j})]$$

et il vient finalement (grâce aux formules du 2°,

$$0 = 2(k+1)\sigma_{k+1} - (n-k)\,\sigma_k + (k+1)(n-k-1)\,\sigma_{k+1} - \mathrm{C}^2_{n-k}\sigma_k + \mathrm{C}^2_{k+1}\sigma_{k+1},$$

soit

$$(k+1)(2n - k + 2)\,\sigma_{k+1} = (n-k)(n-k+1)\,\sigma_k.$$

Comme $\sigma_0 = 1$, cette formule détermine de façon unique les σ_k, donc les x_i à l'ordre près et la condition $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ entraîne l'unicité du point critique de F.

4° _ Pour n fixé, posons

$$S(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant l'unique point déterminée au 3°.

La relation entre σ_k et σ_{k+1} donne facilement, pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$(n-j)(n+3+j)\, a_j + (j+1)(j+2)a_{j+1} = 0,$$

ce que l'on peut généraliser à $j = n,\ n+1, \ldots$ en posant $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$; d'où

$$-\sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)\, a_j x^j - 4\sum_{j=0}^{+\infty} j\, a_j x^j +$$

$$+ n(n+3)\sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j + \sum_{j=0}^{+\infty} j\,(j+1)a_{j+1}\, x^j + 2\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)a_{j+1}\, x^j = 0,$$

soit

$$x(1-x)S''(x) + (2-4x)S'(x) + n(n+3)S(x) = 0.$$

Cette équation différentielle détermine le polynôme S à un facteur près.

Posons

$$H(x) = x(x-1)S(x) = \prod_{j=0}^{n+1} (2x - x_j);$$

alors on obtient

$$x(x-1)H''(x) - (n+1)(n+2)H(x) = 0.$$

5° _ Introduisons le polynôme de Legendre relativement au segment [0, 1]:

$$Q_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(x-1)^n].$$

Alors

* Q_n est de terme dominant $C^n_{2n}x^n$;

* $Q_n(1-x) = (-1)^n Q_n(x)$;

* $Q_n(1) = 1$;

* pour $m \neq n$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{Q_m(t)\,Q_n(t)dt}{1} = 0$;

* pour $n \geq 1$, $(n+1)Q_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)\,Q_n(x) + nQ_{n+1}(x) = 0$;

* $x(x-1)\,Q''_n(x) + (2x-1)\,Q'_n(x) - n(n+1)Q_n(x) = 0,$

soit

$$[x(x-1)\,Q'_n(x)]' = n(n+1)Q_n(x).$$

En posant

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^n(x-1)^n] = \int_0^x \frac{Q_n(t)dt}{1},$$

on obtient

$$x(x-1)R''_n(x) = n(n+1)R_n(x).$$

On sait alors que H est proportionnel à R_{n+1}.

Précisons ce polynôme R_{n+1}, qui est de degré $n+2$.

Si P est de degré au plus $n-1$, on a avec P* une primitive de P,

$$\int_0^1 \frac{R_{n+1}(t)P(t)}{1}dt = -\int_0^1 \frac{Q_{n+1}(t)P^*(t)}{1}dt = 0$$

Il en résulte que, dans la base orthogonale $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n+2})$

$\left(\text{relativement au produit scalaire : } (P \mid Q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{1}\,dt\right)$, on a

$$R_{n+1} \in \text{Vect}\,(Q_{n+2}, Q_{n+1}, Q_n).$$

En utilisant

$$R_{n+1}(1-x) = (-1)^n R_n(x),$$

$R_{n+1}(1) = 0$, et les termes dominants, on obtient

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{4n+6}\left\{Q_{n+2}(x) - Q_n(x)\right\} = \frac{1}{2n+4}\,[(2x-1)\,Q_{n+1}(x) - Q_n(x)].$$

6° _ Notons $C(P)$ le coefficient dominant du polynôme P. On a

$M_n^{\ 2} = \prod \left\{(x_j - x_i)^2 / \, 0 \le i < j \le n+1\right\} = (-1)^{C^2_{n+2}}\, R(H,H')$ où $R(H,H')$ est le déterminant de Sylvester des polynômes H et H'.

Rappel : Si $d°P = p$ et $d°Q = q$, leur déterminant de Sylvester $R(P, Q)$ est le déterminant, dans la base

$$(x^{p+q-1}, x^{p+q-2}, \dots, x, 1)$$

de

$$(x^{q-1}P, x^{q-2}P, \dots, P, x^{p-1}Q, x^{p-2}Q, \dots, 1).$$

Si on note $\lambda_1 \dots\dots\dots \lambda_q$ les racines de Q on a

$$R(P, Q) = (-1)^{pq} c(Q)^p \prod_{k=1}^{q} P(\lambda_k)$$

Ici $R\,Q_{n+1}\,Q_n) = c\,(Q_n)^{n+1} \prod_{k=1}^{n} Q_{n+1}(\lambda_k)$ (les λ_k étant les racines de Q_n).

$$R(Q_n, Q_{n-1}) = c(Q_n)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} Q_{n-1}(\lambda_k).$$

Or

$$Q_{n-1}(\lambda_k) = -\frac{n}{n+1} Q_{n-1}(\lambda_k),$$

donc

$$R(Q_{n+1}, Q_n) = (-1)^n \frac{n}{(n+1)^n} c(Q_n)^2 R(Q_n, Q_{n-1})$$

ce qui donne finalement, avec

$$\begin{cases} R(Q_1, Q_0) = 1 \\ R(Q_{n+1}, Q_n) = (-1)^{n(n+1)/2} \dfrac{n!}{(n+1)^n} [c(Q_1) \leq (Q_2) \ldots c(Q_n)]^2 \end{cases}$$

On a ensuite, par un calcul voisin,

$$R(R_{n+1}, R'_{n+1}) = R(R_{n+1}, Q_{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^{n+1}} c(Q_{n+1})^2 R(Q_{n+1}, Q_n)$$

$$= (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \frac{n!}{2^{n+1}(n+2)^{n+1}(n+1)^n} [c(Q_1) \ldots c(Q_n) c(Q_{n+1})]^2$$

De plus

$$c(R_{n+1}) = \frac{1}{n+2} c(Q_{n+1}).$$

Donc

$$M_n^2 = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} R(H, H') = \frac{(-1)^{(n+1)(n+2)/2}}{c(R_{n+1})^{2n+3}} R(R_{n+1}, R'_{n+1})$$

$$= \frac{n!(n+2)^{n+2}}{(n+1)^n 2^{n+1}} \frac{[c(Q_1) \ldots c(Q_n)]^2}{c(Q_{n+1})^{n+1}}$$

$$= \frac{n!(n+2)^{n+2}}{(n+1)^n 2^{n+1}} \frac{[C^1{}_2 C^2{}_4 \ldots . C^2{}_{2n}]^2}{\left\{C^{n+1}{}_{2n+2}\right\}^{2n+1}}.$$

En simplifiant, on obtient le résultat annoncé ci-dessus.

ULB

Exercice _ On considère l'équation $x = \operatorname{tg} x$ dont l'unique racine dans $\left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ est notée a_n $(n \in \mathbb{N}^*)$. On pose $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$. Existe-t-il une série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p$ telle que $\varepsilon_n a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \varepsilon_n^{2p}$? Quel est son rayon de convergence ?

Cet exercice me fait dire que la pensée, n'est rien sans quelque chose qui force à penser, qui fait violence à la pensée

Le véritable savoir repose dans l'expérience de la découverte et de la redécouverte, une plongée dans l'inconnu où les limites de l'horizon restent toujours à chercher, à inventer, à aimer, justement parce qu'elles se dérobent et accordent ainsi à l'être humain sa liberté.

Ma réponse : *Des preuves, oui, des preuves. L'art de la démonstration est l'un des plus difficiles, il demande une grande virtuosité.*

1° _ Il existe effectivement une série entière de rayon de convergence R' > 0 telle que

$$(1) \qquad \varepsilon_n a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \varepsilon_n^{2p}.$$

Il est fort probable que ce résultat et la valeur de R' se trouvent dans la littérature mathématique. Dans l'ouvrage *Tables of function* de E. JAHNKE et F. EMDE (Dover Publications) addenda page 30, on trouve la formule (avec d'autres notations)

$$\varepsilon_n a_n = 1 - \varepsilon_n^2 - \frac{2}{3}\varepsilon_n^4 - \frac{13}{15}\varepsilon_n^6 - \frac{146}{105}\varepsilon_n^8 - \ldots$$

sans aucune autre précision.

Pour montrer l'existence de la série (1), posons

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \eta_n \,;$$

on sait que $\lim_{n \to +\infty} \eta_n = 0.$

On a

$$\eta_n + \operatorname{cotg} \eta_n = \frac{1}{\varepsilon_n},$$

ce qui s'écrit aussi

(2) $$\varepsilon_n(\eta_n^{\,2} + \eta_n \operatorname{cotg} \eta_n) = \eta_n.$$

Considérons l'équation à l'inconnue y

(3) $$x(y^2 + y \operatorname{cotg} y) = y,$$

la fonction $y \longmapsto y^2 + y \operatorname{cotg} y$ étant prolongée par 1 en 0. Le théorème des fonctions implicites nous donne l'existence d'une solution non nulle, unique, $x \longmapsto y$ définie dans un voisinage de 0 et telle que $y = 0$ pour $x = 0$. Cette fonction est impaire et, si on trouve quelle est développable en série entière,

(4) $$y = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \, x^{2p+1}$$

de rayon de convergence $R' > 0$, on aura

$$\varepsilon_n a_n = 1 - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \varepsilon_n^{\,2p+2} \quad \text{pour} \quad \omega_n < R'.$$

2° _ Étude de l'équation

(5) $$x\, f(y) = y$$

où f est développable en série entière

$$f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n y^n$$

de rayon de convergence $R > 0$ et $d_0 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'une solution unique $y = g(x)$ définie dans un voisinage de 0 et telle que $g(0) = 0$. Posons *a priori*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n x^n, \tag{6}$$

un calcul formel donne par identification dans (5)

$$\begin{cases} e_1 = d_0 \\ e_2 = d_1 e_1 = d_0 d_1 \\ e_3 = d_1 e_2 + d_2 e_1^2 = d_0 d_1^2 + d_0^2 d_2 \\ \ldots \end{cases}$$

On constate facilement que

$$e_n = P_n(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$$

où P_n est un polynôme à coefficients entiers > 0. Il reste à montrer que la série obtenue est convergente.

Soit $\rho \in \,]0, R[$. On sait que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |d_n| \rho^n$ est convergente, soit alors

$$M = \sup\left\{ |d_n| \rho^n / \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

et considérons l'équation auxiliaire à l'inconnue Y

$$x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{MY^n}{\rho^n} \right) = Y,$$

c'est-à-dire

$$Y^2 - \rho Y + \rho M x = 0.$$

Cette équation a une racine et une seule qui tend vers 0 quand x tend vers 0, à savoir :

$$Y = \frac{\rho}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4M\frac{x}{\rho}}\right);$$

cette solution est développable en série entière de x

$$Y = \sum_{n=1}^{+\infty} e'_n x^n$$

avec un rayon de convergence égal à $\frac{\rho}{4M}$. Les coefficients peuvent s'obtenir comme dans le cas de l'équation (5), c'est-à-dire

$$e'_n = P_n\left(M, \frac{M}{\rho}, \dots, \frac{M}{\rho^{n-1}}\right)$$

et comme P_n est un polynôme à coefficients positifs, on a

$$\left|e_n\right| \le P_n\left(\left|d_0\right|, \left|d_1\right|, \dots, \left|d_{n-1}\right|\right) \le P_n\left(M, \frac{M}{\rho}, \dots, \frac{M}{\rho^{n-1}}\right) = e'_n.$$

Ceci prouve que la série (6) a un rayon de convergence $\ge \frac{\rho}{4M}$.

Pour déterminer les coefficients e_n, on peut procéder par identification, ou utiliser une formule due à Lagrange

$$e_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{f(x)\}^n\right]_{x=0}$$

dont je donne une démonstration au paragraphe 4°.

3° Application à l'équation $x(y^2 + y\operatorname{cotg} y) = y$.

On sait (*cf.* N. BOURBAKI, *Fonctions d'une variable réelle,* chap. VI, § 2) que

$$z \operatorname{cotg} z = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} z^n$$

pour $|z| < \pi$ avec $S_{2n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$.

On a donc

$$y^2 + y\operatorname{cotg} y = 1 + \frac{2}{3}y^2 - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} y^{2n} \text{ pour } |y| < \pi.$$

On peut prendre ici $M = 1$, $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}}$, alors la série (6) a un rayon de convergence $R' \geq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0{,}306\ldots$

Les coefficients b_n peuvent s'obtenir par identification ou par la formule de Lagrange ; on obtint ainsi :

$$\varepsilon_n a_n = 1 - \varepsilon_n^{\ 2} - \frac{2}{3}\varepsilon_n^{\ 4} - \frac{13}{15}\varepsilon_n^{\ 6} - \frac{146}{105}\varepsilon_n^{\ 8} - \frac{781}{315}\varepsilon_n^{\ 10} \ldots$$

Le coefficient $\varepsilon_n^{\ 10}$ a été obtenu par la formule de Lagrange.

4° _ Utilisation des propriétés des fonctions analytiques.

La théorie des fonctions analytiques permet d'obtenir facilement les résultats précédents. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $|z| < \mathbb{R}$.

Considérons l'équation

$$F(z) = z - xf(z) = 0 \text{ avec } f(0) \neq 0.$$

Soit $r \in]0, R[$, C_r le cercle $|z| = r$ et D, le disque ouvert $|z| < r$. Soit $x \neq 0$ tel que

$$s(r) = \sup\left\{xf(z) < r / |z| = r\right\}.$$

Comme pour $|z| = r$, on a $|xf(z)| < r$, les équations $z = 0$ et $F(z) = 0$ ont le même nombre de racines dans D_r, c'est-à-dire une seule, on note y celle de $F(z) = 0$, donc $xf(y) = y$, comme $x \neq 0$, $f(0) \neq 0$, on a $y \neq 0$.

La fonction $z \longmapsto \dfrac{z[1 - xf'(z)]}{f(z)}$ a un unique pôle simple y dans D, et le résidu correspondant est y, on a alors $y = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C_r} \frac{z[1 - xf'(z)]}{z - xf(z)}\,dz.$

Pour $z \neq 0$, on a

$$\frac{z[1 - xf'(z)]}{z - xf(z)} = \frac{1 - xf'(z)}{1 - \frac{x}{z}f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\{f(z)\}^n}{z^n} - \frac{f'(z)\{f(z)\}^{n-1}}{z^{n-1}}\right)x^n.$$

Grâce à la condition sur $s(r)$, la série converge normalement sur le cercle C_r, on peut intégrer terme à terme, et on a

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2i\pi}\left\{\int_{C_r}\frac{\{f(z)\}^n}{z^n}\,dz - \int_{C_r}\frac{f'(z)\{f(z)\}^{n-1}}{z^{n-1}}\,dz\right\}x^n.$$

On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r}\frac{\{f(z)\}^n}{z^n}\,dz = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{\,n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)]^n\right)_{z=0}$$

et pour $n \geq 2$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_r}\frac{f'(z)\{f(z)\}^{n-1}}{z^{n-1}}\,dz = \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{d^{\,n-2}}{dz^{n-1}}f'(z)\{f(z)\}^{n-1}\right)_{z=0}$$

$$= \frac{1}{n(n-2)!}\left(\frac{d^{\,n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)\}^n\right)_{z=0}.$$

Dans le développement de y, le coefficient de x^n est

$$\left\{\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n(n-2)!}\right\}\left(\frac{d^{\,n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)\}^n\right)_{z=0} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^{\,n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)\}^n\right)_{z=0} = \frac{1}{2i\pi n}\int_{C_r}\frac{\{f(z)\}^n}{z^n}\,dz,$$

résultat valable pour $n = 1$. On a donc

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^{\,n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)\}^n\right)_{z=0}.$$

Ces résultats sont valables si

$$|x| < \frac{r}{\sup\left\{|f(z)| / |z| = r\right\}}.$$

Dans le cas où $f(z) = z^2 + z \operatorname{cotg} z$, on a pour $0 < r < \pi$

$$\frac{r}{\sup\left\{f(z) / |z| = r\right\}} = \frac{1}{\sup\left\{|z + \operatorname{cotg} z| / |z| = r\right\}};$$

la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{\sup\left\{|z + \operatorname{cotg} z| / |z| = r\right\}}$ est continue sur $]0, \pi[$, elle tend vers 0 quand r tend vers 0 ou π, elle admet donc un maximum atteint pour un $r_1 \in]0, \pi[$ et la série donnant y converge si

$$|x| < \frac{1}{\sup\left\{|z + \operatorname{cotg} z| / |z| = r_1\right\}}.$$

La détermination de $\sup\left\{|z + \operatorname{cotg} z| / |z| = r\right\}$ n'a pas été entreprise. En écrivant que $|z + \operatorname{cotg} z| \leq |z| + |\operatorname{cotg} z|$ on obtient que R' > 0, 4356.

Nota _ Pour l'étude du développement en séries entières des fonctions implicites et la formule de Lagrange, on pourra consulter le cours d'*Analyse mathématique* de E GOURSAT, tome 1 chap. IX, § IV et tom II, chap. XIV, § III.

Exercice _ Soit x un réel strictement supérieur à 1. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n + 1}{x^{n^2}(x^n - 1)}$$

et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x^{2n} + 1)}{x^{n^2}(x^{2n} - 1)}.$$

De quoi s'agit-il, au fond ? De la poésie, bien sûr. Rien que de la poésie. De quel éclair ces sommes infinies sont-elles la jouissance ? demandez-vous. Eh bien, de ce qui advient poétiquement.

Mais encore ? Le fait qu'il puisse y avoir ce rapport entre la convergence, les familles dénombrables et les familles sommables, en pleine culture, mathématique – l'air de l'*Analyse Mathématique*, vous l'avez dans sa musique et dans sa construction – vous sentez que les gens qui ont créé, cette discipline, ont respiré d'une certaine façon, marché d'une certaine façon, navigué d'une certaine façon.

Voilà, c'est à la fois extrêmement vif, comme nature, et fabuleux, comme culture. Les deux, à égalité.

Ma solution : *L'objet de la Mathématique est de nous apprendre à lire. Les démonstrations viennent de la solitude, du silence, de l'inavouable, d'une ombre mobile et jalousement protégée. De quoi est-il question dans cette résolution ? De la danse des concepts, de leur corps, du rythme. Et de ce qui les « porte » : la démonstration en tant qu'elle « donne forme », poétiquement.*

Quand je rédige un exercice mathématique, je m'en sers pour parler plus loin. J'essaye toujours de montrer qu'on ne voit un concept que si on est capable de le verbaliser. Je ne *cherche pas qu'à mathématiser, je cherche aussi à dire, je ne cherche pas qu'à faire, je cherche aussi à dire.*

La convergence des séries est immédiate. On écrit pour $x > 1$:

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{x^n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{x^n}} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{kn}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{pn}}$$

ce qui donne

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{pn}} .$$

De la même façon, on a

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{pn}} .$$

Ces dernières expressions nous incitent à considérer les familles dénombrables suivantes :

suivantes :

$$\begin{cases} a = \{a_{n,\,p} \,/\, (n,\,p) \in \mathrm{R}\} \\ b = \{b_{n,\,p} \,/\, (n,\,p) \in \mathrm{R}\} \end{cases}$$

avec

$$\mathrm{R} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

$a_{n,\,p} = \dfrac{1}{x^{pn}}$ et $b_{n,\,p} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^{pn}}$ a et b sont des familles sommables car toutes les sommes $\sum \left|a_{n,\,p}\right|$ et $\sum \left|b_{n,\,p}\right|$ où $(n,\,p)$ parcourt un sous-ensemble fini de R, sont majorées par $F(x)$.

Il s'agit maintenant de sommer convenablement a et b.

On a

$$\text{(1)} \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,\,n} + T(a)$$

avec

$$T(a) = \sum_{(n,\,p)\,\in\,R} (a_{n,\,n+p} + a_{n+p,\,n}).$$

Preuve _ Notons $D = \{(m, m)/\ m \in \mathbb{N}^*\}$ la diagonale de R et $\Delta = R \backslash D$.

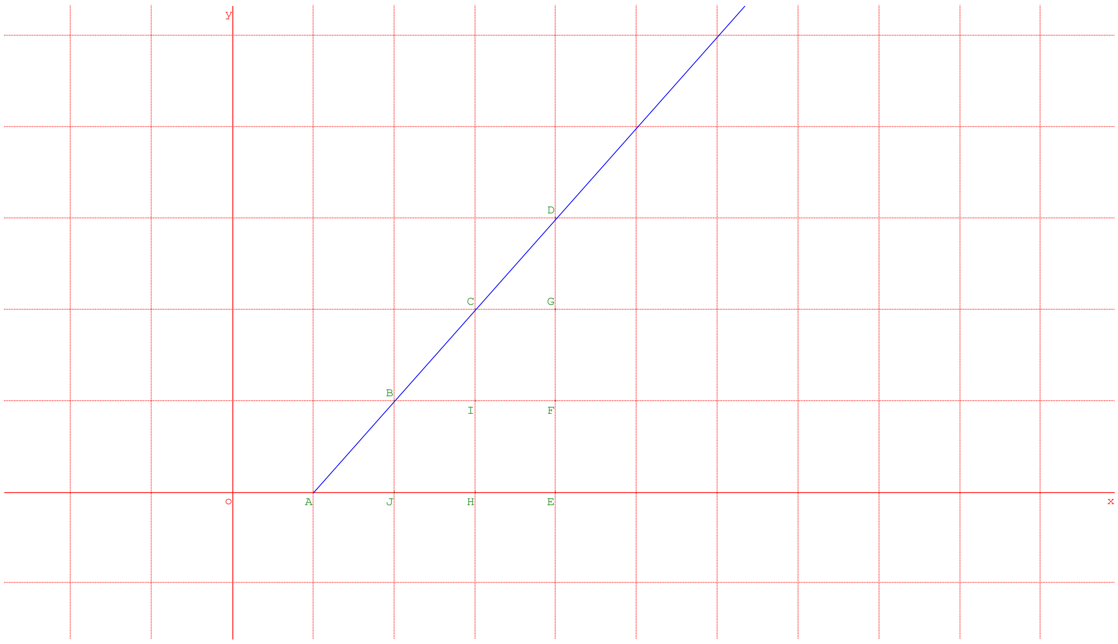
D et Δ constituent une partition de R, donc, a étant sommable, on a

$$F(x) = \sum_{(n,\,p)\,\in\,D} a_{n,\,p} + \sum_{(n,\,p)\,\in\,\Delta} a_{n,\,p}.$$

On a

$$\sum_{(n,\,p)\,\in\,D} a_{n,\,p} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,\,n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n-1} a_{n,\,p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_{n,\,p}$$

a étant sommable, on voit, à l'aide d'un schéma par exemple, que



$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n-1} a_{n,\,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_{n,\,p}.$$

Donc

$$\sum_{(n,\,p)\,\in\,\Delta} a_{n,\,p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_{n,\,p} + a_{p,\,n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} (a_{n,\,n+p} + a_{n+p,\,n}).$$

Ceci établit (1).

On a aussi, bien sûr

(2) $$\mathrm{G}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n,\,n} + \mathrm{T}(b).$$

Calculs de $\mathrm{T}(a)$ et $\mathrm{T}(b)$.

On a

$$\mathrm{T}(a) = 2 \sum_{(n,\,p)\,\in\,\mathrm{R}} \frac{1}{x^{n(n+p)}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n^2}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{pn}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n^2}(x^n - 1)}.$$

$$\mathrm{T}(b) = \sum_{(n,\,p)\,\in\,\mathrm{R}} \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^{n+p-1}}{x^{n(n+p)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n^2}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^p}{x^{np}}.$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n^2}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{x^{2pn}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n^2}(x^{2n} - 1)}$$

On achève les calculs par (1) et (2).

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n^2}} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n^2}(x^{2n}-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n+1}{x^{n^2}(x^n-1)}.$$

$$\mathrm{G}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n^2}} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n^2}(x^{2n}-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x^{2n}+1)}{x^{n^2}(x^{2n}-1)}.$$

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

L'essentiel de ce travail, est de mettre les outils dont je dispose au service de la plus grande précision possible.

Je n'ai jamais proposé d'explication, ni posé de question qu'il n'y ait eu d'abord un problème. Et, dès le moment où vous amenez transparence et clarté dans un exercice, l'explication est probablement bonne ; ce qui était impossible à expliquer s'éclaire.
Ces résultats sont fidèles au but que je m'étais fixé : sculpter toute une information opulente dans un noyau de cerise.
Le lecteur pourra trouver autant d'invitations à la lecture des jalons de l'*Analyse Mathématique*, dans les réponses des questions que m'ont suggérées des collègues…

À la recherche du réel perdu, telle est l'aventure. Ouvrez les livres, fréquentez les bibliothèques, écoutez des musiques, essayez donc enfin de vivre les Mathématiques, dialoguez avec les concepts, mathématisez tant que vous voulez, il n'est question que de ça. Théorèmes, définitions, démonstrations, images, rigueur, précision, tout vient de ce défi, de ce fleuve, cataractes d'audaces, chutes d'imaginations, bouillon de culture, frôlements d'idées, tourbillon de neurones, de théories, d'exposés, d'abstraction, d'intuition, de mots, de concepts. Camps de rencontres, temples d'amours. Donnez-moi une table de travail, n'importe laquelle, n'importe où, quelques feuilles de papier, un crayon et un sujet qui suscite ma curiosité, le reste s'ensuit nécessairement, la plus grande liberté ne peut pas ne pas être là, c'est automatique. Aimez, ou ennuyez-vous : tel sera le choix.

Professeur de Maths, je n'ai d'autre intention que de répandre, autant que possible, cette façon d'appréhender le monde, d'être une passerelle entre ceux qui savent et ceux qui veulent apprendre. Le fond de l'affaire, c'est qu'avec un peu d'effort, un peu de candeur, celle-là même qu'on perd en acquérant des préjugés, on est capable de réfléchir et de s'intéresser à toutes les vérités. Amis lecteurs, au fur et à mesure de la pratique, vous apprendrez vite que la qualité esthétique d'une résolution d'un exercice reflète la qualité éthique de son auteur.

Une fois la cristallisation commencée, l'on jouit avec délices de chaque nouvelle beauté que l'on découvre dans ce qu'on aime. Mais qu'est-ce que la beauté ? C'est une nouvelle aptitude à vous donner du plaisir.

Pour découvrir la nature de la beauté des équations, il convient de rechercher quelle est la nature des plaisirs de chaque individu.

La beauté que vous découvrez étant donc une nouvelle aptitude à vous donner du plaisir, et les plaisirs variant comme les individus, la cristallisation formée dans la tête de chaque homme doit porter la couleur des plaisirs de cet homme. La cristallisation de la formule mathématique d'un théoricien, ou sa BEAUTÉ, n'est autre chose que la collection de TOUTES LES SATISFACTIONS de tous les désirs qu'il a pu former successivement à son égard…

Mais, n'oubliez surtout pas que : *Maîtrise et enseignement n'ont pouvoir que d'inculquer. De leur propre fond, ils ne tiennent aucun pouvoir.*

De plus, il n'y a pas de Mathématique ni de publication sans exposition, souvent dangereuse, à l'autre, sans face à face avec le concept. Je ne saurai jamais plus qui je suis, où je suis, d'où je viens, où je vais, par où passer. Je m'expose à autrui, aux étrangetés. Il faut bien un jour ouvrir la porte d'ombre, s'avancer vers les premiers degrés, chercher une lumière pour se reconnaître dans les brouillards de l'ignorance si épais qu'ils nous renvoient à cette forme de civilité qu'est l'humilité et nous enseignent ce qu'il y a de légitime dans le désir des belles actions. Là, le chercheur du graal expérimente le dur, l'extérieur, l'objectif. Jaillissent hors des abysses, boîtes noires fondatrices, les théorèmes, beaux, les définitions, subtiles, les objets ouvrés, notre temps et notre vie, ressuscités. J'espère que la lumière artificielle et normative d'une vérité stable sur mon propre travail ne m'a pas aveuglé au point de me faire perdre de vue que l'essentiel était dans le mouvement, dans la nécessité organisatrice dont on éprouve la loi quand les notes prises au hasard trouvent d'elles-mêmes leur place et produisent une mélodie.

Théo Héikay/pdf