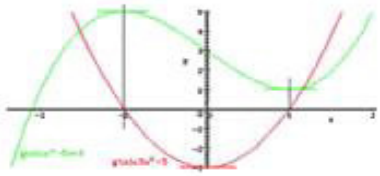




*The essence of mathematics resides in its freedom* / *Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique*
--- Georg Cantor --- Galilée

*« Ah, mes amis, il nous faut surmonter même les Grecs ! »*

NIETZSCHE

Je vais m'attaquer ici à un classique plein de nostalgie, en généralisant via quelques préliminaires algébriques, le bon vieux théorème de Pythagore, que nos parents et les parents de nos parents ont aussi connu, et dont nous parlerons à nos enfants et petits enfants.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme et du produit scalaire euclidiens usuels, notés $||*||$ et $<.\,,\,.>$.

Si $Q_j$ est une matrice symétrique d'ordre $n$, on note aussi $Q_j$ l'application linéaire $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dont la matrice est $Q_j$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si $x' = (x_1 x_2 \dots x_n)$, on note $q_j(x) = x'\,Q_j\,x = <x, Q_j\,x>$ la forme quadratique associée à $Q_j$.

Soient $Q_1,\dots,Q_p$ des matrices symétriques d'ordre $n$, de rangs respectifs $r_1,\dots,r_p$, telles que $I_n = Q_1 + \dots + Q_p$ *ie.* Pour tout x de $\mathbb{R}^n$ : $x'x = ||x||^2 = q_1(x) + \dots + q_p(x)$.

α) _ Montrer que si $r_1 + \dots + r_p \leq n$, alors $r_1 + \dots + r_p = n$ et il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $(e_{jk})$, $j = 1, \dots, p$ ; $k = 1, \dots, r_j$, telle que

$$q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} <x, e_{jk}>^2.$$

β) _ Réciproquement, montrer que s'il existe une telle base, on a $r_1 + \dots + r_p = n$.

Soient $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ des *v.a.r.* indépendantes de loi $N(m_i\,,\ 1)$, M le vecteur $(m_1, \dots, m_n)'$, X le vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_n)'$ de loi $N_n\,(M, I_n)$.

δ) _ Montrer que si $r_1 + \dots + r_p \leq n$, alors les *v.a.r.* $q_j(X) = X'\,Q_j\,X$, $j = 1, \dots, p$, sont des *v.a.* indépendantes de loi $X'^2\,(r_j, \lambda_j)$, où le paramètre de non-centralité est :

$$\lambda_j = q_j(M) = M'\,Q_j\,M.$$

γ) _ Réciproquement, montrer que si les *v.a.* $q_j(X)$, $j = 1, \dots, p$, sont des *v.a.* indépendantes de loi $X'^2\,(r_j, \lambda_j)$, alors $n = r_1 + \dots + r_p$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = \|M\|^2$.

## Ma Solution

α) _ Par hypothèse, $\sum_{j=1}^{p} r_j \leq n$ et $I_n = Q_1 + \ldots + Q_p$.

Notons $V_j = Q_j(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel image de $\mathbb{R}^n$ par l'application linéaire de matrice $Q_j$ (dans la base canonique).

Alors $V_1 + V_2 + \ldots + V_p$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\leq n$.

Mais tout x de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire : $x = Q_1(x) + \ldots + Q_p(x)$ et par conséquent

$V_1 + V_2 + \ldots + V_p = \mathbb{R}^n$, $\dim(V_1 + V_2 + \ldots + V_p) = n$ d'où $\sum_{j=1}^{n} r_j = n$, et la somme des sous-espaces

$V_j$ est directe (sinon $\dim(V_1 + V_2 + \ldots + V_p) < \sum_{j=1}^{p} \dim V_j$).

Soit $x \in V_j$ ; dans la décomposition : $x = Q_1(x) + \ldots + \ldots Q_j(x) + \ldots + Q_p(x)$, on a x et $Q_j(x)$ dans $V_j$, d'où par unicité $Q_j(x) = x$. Ainsi $Q_j Q_j = Q_j$, et comme $Q_j$ est symétrique, $Q_j$ est projecteur.

De plus si $x \in \mathbb{R}^n$, de $x = Q_1(x) + \ldots + \ldots Q_j(x) + \ldots + Q_p(x)$ on déduit :

$$Q_j(x) = Q_j Q_1(x) + \ldots + Q_j Q_p(x)$$

Et en vertu de l'unicité et de $Q_j Q_j = Q_j$, on a $Q_j Q_k = 0$ pour tout $k \neq j$. Par conséquent les sous-espaces sont orthogonaux. On peut donc trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, en réunissant des bases orthonormées $e_{j1}, \ldots, e_{jr_j}$ de chaque sous-espace $V_j$. Dans cette base, on a alors

$Q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{jk} \rangle e_{jk}$ et

$$q_j(x) = \langle x, Q_j(x)\rangle = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{jk}\rangle^2 \text{ ainsi que } x'x = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{jk}\rangle^2 .$$

La relation $\sum_{j=1}^{p} r_j = n$ implique en particulier que les formes quadratiques $q_j(x)$ sont définies positives.

β) _ Si une telle base existe, $q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{jk}\rangle^2$, et comme $x = \sum_{j,k}^{\cdot} \langle x, e_{jk}\rangle\, e_{jk}$, on a par hypothèse :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{r_j} \langle x, e_{jk}\rangle^2 = \sum_{j=1}^{p} q_j(x) \text{ et } r_1 + \dots + r_p = n.$$

δ) _ Si $r_1 + \dots + r_p \leq n$, on sait d'après α) _ que $r_1 + \dots + r_p = n$. Soit $(e_{jk})$ la base orthonormée définie au α) _.

Soit $(Y_{jk})$ les composantes du vecteur X dans cette base. Le vecteur $Y = (Y_{jk})$ est encore un vecteur gaussien dont les composantes sont indépendantes, et puisque

$Y_{jk} = \langle X, e_{jk}\rangle$, on a $E(Y_{jk}) = \langle M, e_{jk}\rangle$.

Par construction de la base $(e_{jk})$, on a : $q_j(x) = \sum_{k=1}^{r_j} Y^2_{jk}$ pour $j = 1, \dots, p$.

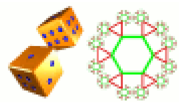
Les *v.a.* $q_j(x)$ sont donc indépendantes, puisque les $Y_{jk}$ le sont, de loi $X'^2(r_j, \lambda_j)$ avec :

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{r_j} (E(Y_{jk}))^2 = \sum_{k=1}^{r_j} \langle M, e_{jk}\rangle^2 = q_j(M).$$

γ) _ L'hypothèse entraîne que $\sum_{j=1}^{p} q_j(x)$ suit une loi de $X'^2(n, \; ||M||^2)$, on a nécessairement :

$$n = \sum_{j=1}^{p} r_j \quad \text{et} \quad ||M||^2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.$$

***Quod erat demonstrandum*, as Latinists like to say.**



***« Il y a une atmosphère des idées. »***

HONORÉ DE BALZAC

L'avantage de donner des colles chez les taupins, c'est qu'on peut de temps en temps, faire du hors piste.

Tout le monde connaît le théorème qui dit que : Si E est un espace vectoriel normé complet, la convergence absolue, (d'une série) implique la convergence.

Car soit la série absolument convergente, de terme général $u_n$. Alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall\, q \geq n_0, \forall p \geq q, \; ||u_q|| + ||u_{q+1}|| + \ldots + ||u_p|| \leq \varepsilon,$$

(Critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la série des $||\, u_n||$), d'où *a fortiori*, on a

$$\forall\, q \geq n_0\,, \forall p \geq q, \; ||u_q|| + u_{q+1} + \ldots + u_p|| \leq \varepsilon$$

(Inégalité triangulaire) : le critère de Cauchy appliqué cette fois à la série des $u_n$ dans E complet permet de conclure.

La réciproque est fausse : une série peut être convergente sans l'être absolument, comme le montre le cas de la série dite harmonique de terme général réel $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

On a $\left|u_n\right| = \frac{1}{n+1}$, c'est le terme d'une série divergente, mais elle est convergente (c'est un classique).

**Remarque _** ***Si E n'est pas complet, une série peut être absolument convergente sans être convergente.***

Chaque fois que l'on veut un espace vectoriel normé non complet, il faut passer à la dimension infinie, ($\mathbb{R}^n$ étant toujours complet) et on sait que E = $\mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet.

On prend donc E = $\mathbb{R}[X]$, normé par la norme infinie : si $P(X) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}}^{\cdot} a_n X^n$, (les $a_n$ étant presque tous nuls), est un polynôme _ on pose $||P||_\infty = sup \left\{ \left|a_n\right|, n \in \mathbb{N} \right\}$, (existe car le cardinal de l'ensemble des $n$ tels que $a_n \neq 0$ est fini) ;

Soit $u_n = \frac{X^n}{2^n}$, on a $||\, u_n ||_\infty = \frac{1}{2^n}$ : la série des $U_n$ diverge dans E, car si le polynôme

$P$ était somme de la série des $u_n$, en notant $P = \sum\limits_{n=0}^{P_0} a_n X^n$, ($P_0 = 0$ ou degré de $P$), pour tout $n > P_0$,

le polynôme $U_n - P$ a son terme de degré $P_0 + 1$ de coefficient non nul, égal à $\frac{1}{2^{p_0+1}}$ donc

$||U_n - P||_\infty \geq \frac{1}{2^{p_0+1}}$, (avec $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$).

Mais alors,

$$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2^{p_0+1}},\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \exists\, n \geq n_0,$$

tel que $||U_n - P||_\infty \geq \varepsilon$ (il suffit de prendre $n \geq P_0 + 1$ en fait), ceci nie le fait que la suite des sommes partielles $U_n$ converge vers $P$.

Attention donc sur les espaces non complets à ne pas conclure trop vite, d'autant plus que dans l'esprit de votre programme, vous serez pratiquement toujours amenés à chercher la convergence absolue, non par masochisme, mais parce la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ va nous permettre, pour les séries à termes positifs, d'établir des critères de comparaison dont on déduira des critères de convergence.

**Une fois pour toute, si on parle de convergence absolue, l'espace *E* est complet.**