Les marges sont les lieux les plus proches de sens

« Les hommes d'habitude, voient les choses telles qu'elles sont et disent ''pourquoi ?''. Je rêve de choses qui ne sont pas et je demande ''pourquoi pas ?'' »

BERNARD SHAW

J'ai essayé de traduire l'exercice ci-dessous, mais ma meilleure rédaction est loin de me satisfaire. Si le lecteur a une idée d'une traduction adéquate, je lui serais reconnaissant de me la faire parvenir, par mon e-mail habituel : Theo.Heikay@Math-Univ-Provence.eu

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, continue, ouverte, surjective. Montrons que $f(0) \in \{0, 1\}$. Montrons que $Z = f^{-1}(1)$ est fermé non vide de cardinal fini.

Il m'a d'abord paru utile de justifier que les *maxima locaux* valent 1 et les *minima locaux* valent 0.

Supposons qu'en a f atteigne un maximum local avec $f(a) < 1$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \,]a - \alpha, a + \alpha[\, \cap [0, 1] = I, f(x) \leq f(a)$.

Mais I est un intervalle ouvert de $[0,1]$, donc f étant continue $f(I)$ est un intervalle, (car connexe) et f étant ouverte, $f(I)$ est un ouvert de $[0,1]$, or il est du type $(\;\; , f(a)\,]$ avec $f(a) < 1$: ce n'est pas un intervalle ouvert de $[0,1]$. C'est absurde, d'où $f(a) = 1$, (et de même un minimum local vaut 0).

Si alors $f(0) = u \in]0, 1[$, ce n'est ni un maximum local ni un minimum local,

donc $\forall\ \alpha > 0$, $\exists x_1, x_2$ dans $]0, \alpha[$ tels que $f(x_1) < u = f(0) < f(x_2)$. En particulier, ($f$ continue en 0 et $f(0) \in]0, 1[$) ceci est vrai pour α assez petit pour que $f([0, \alpha]) \subset]0, 1[$.

Puis, il existe x_3 entre x_1 et x_2 tel que $f(x_3) = u$, (théorème des valeurs intermédiaires).

Supposons $0 < x_1 < x_3 < x_2$: sur $[0, x_3]$ f prend la valeur $f(x_1) < f(0) = f(x_3)$, donc f admet un minimum absolu, (continue sur un compact) donc relatif, atteint, et comme $f([0, \alpha] \subset]0, 1[$, ce minimum local n'est pas 0. L'hypothèse $0 < x_2 < x_3 < x_1$ conduit à l'existence, sur $[0, x_3]$, de valeurs $(f(x_2)) > f(0) = f(x_3)$, donc a un maximum local de f qui n'est pas 1. On aboutit à une absurdité donc $f(0) \in \{0, 1\}$.

Puis $Z = f^{-1}(1)$ est fermé, (f est continue), non vide, (f est surjective fini. Sinon il existerait un point d'accumulation a dans Z, donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement monotone d'éléments de Z, qui convergerait vers a. Sur le segment d'extrémités x_n et x_{n+1}, f, continue, admet un minimum, qui est un minima local, donc qui vaut 0, et qui est atteint en y_n. D'où une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points qui converge vers a, avec $f(y_n) = 0$. Par continuité, on aurait $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$ et $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = 0$. Absurde. Donc Z est fini.

Quod erat demonstrandum, comme aiment à le dire les latinistes.

La même suite peut-elle avoir des limites différentes pour des normes différentes ?

« Votre cervelle, docteur, est un bouillon de culture pour points d'interrogation !... »

PAUL VALÉRY

Je vais essayer de répondre à ce carrefour, à une question en général non posée, du moins si j'en juge par mon passé d'étudiant : *la même suite peut-elle avoir des limites différentes pour des normes différentes ?* Honnêtement, on répond plutôt non… En soumettant à la sagacité de mes étudiants cette question (ce mercredi 12 mars 08), je n'ai pas été déçu qu'ils aient avancé une réponse univoque. Eh bien non, c'est oui. Mais peut-on le prouver en s'appuyant sur des exemples ? Ce n'est pas par masochisme que j'ai tenu à rédiger une justification à ce non dit, mais par ce que je pense être de l'honnêteté intellectuelle. Il me semble que l'intérêt de la formation mathématique est de former des individus qui ne « s'en laissent pas conter », qui ne se contentent pas d'affirmations non justifiées. J'ai donc préféré rédiger ces lignes rébarbatives, quitte à ce qu'elles ne soient pas lues.

Soit en effet $\mathbf{E} = \mathbb{R}[\mathbf{X}]$, $\mathbf{A}$ une partie bornée, de cardinal infini de $\mathbb{R}$, on définit une norme $N_{\mathbf{A}}$ sur $\mathbf{E}$ par : $N_{\mathbf{A}}(P) = \sup \left\{ \left| P(x) \right| ,\ x \in A \right\}$.

C'est une norme car $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{A}}$ fermé borné donc compact, et $N_{\mathbf{A}}(P) = N_{\overline{\mathbf{A}}}(P)$ d'ailleurs car P est continue, existe. Si c'est nul, le polynôme P est nul, (infinité de zéros), et on vérifie facilement qu'il s'agit d'une norme.

Soit alors les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que je viens de construire, et les deux polynômes $Q(x) = x$ et $-Q = R$.

Si $A = [-1, 0]$, comme alors $\left| t \right| = -t = R(t)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall t \in [-1, 0], \left| R(t) - P_n(t) \right| \leq \varepsilon$$

soit $N_{\mathbf{A}}(R - P_n) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$: la suite des P_n converge vers R pour la norme $N_{\mathbf{A}}$.

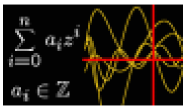
Par contre (les linguistes diront : en revanche ! n'est-ce pas…), avec **B** = [0, 1], pour $t \in [0, 1]$, $|t| = t = \mathrm{Q}(t)$, et cette fois on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{N}_{\mathbf{B}}(\mathrm{Q} - \mathrm{P}_n) = 0$.

Donc cette suite admet deux limites différentes pour deux normes différentes.

Moralité _ En dimension infinie, il y a en général non équivalence des normes, ce qui fait que la même suite peut avoir des limites différentes pour des normes différentes.

Autre exemple

Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q pour cette norme.



Ma solution

On se donne le polynôme Q = $\sum_{k=0}^{q} a_k X^k$, avec q, degré de Q si Q est non nul, et sinon, q entier laissé à votre choix.

En posant $e_i = X^i$ pour $i \leq q$ et $e_i = X^i - Q$ si $i > q$ la famille des $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degrés échelonnés, donc c'est une base de E = $\mathbb{R}[X]$, et, en posant pour P = $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i$, (les α_i étant presque tous nuls), $||P|| = \sup \left\{ \frac{1}{2^i} |\alpha_i|, i \in \mathbb{N} \right\}$, ce sup existe, (famille finie de nombres positifs), et il est immédiat de vérifier que c'est une norme.

De plus comme pour tout $n > q$ on a $X^n - Q = e_n$, on a $||X^n - Q|| = \frac{1}{2^n} \times 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} ||X^n - Q|| = 0$.

Pour cette norme, la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q et on peut choisir Q au départ quelconque, donc la même suite peut avoir des limites différentes pour des normes non équivalentes.