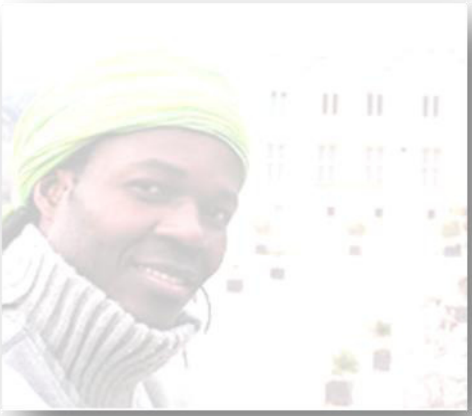

Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques

Je pensais bien ne pas reprendre la plume après la rédaction de mes deux derniers articles : Les formulations séquentielles du déterminant & Modélisation d'une particule non axisymetrique. Mais mon Mentor **Trinh Thuan** me fit remarquer qu'une fois de plus, les Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques, n'étaient pas à l'honneur.

Il est vrai que comme tout enseignant-universitaire, je peux constater les difficultés des étudiants en physique théorique, qui ne disposent pas de définitions claires des outils mathématiques, prenant en compte le calcul différentiel et intégral.

C'est pourquoi je me suis pris au jeu, en rédigeant ces deux notes supplémentaires. Il y manque encore bien des choses, en particulier les notions d'espaces de Hilbert avec des groupes de symétrie, des fonctions d'onde, des vecteurs d'état, des valeurs propres, des matrices densité et autres opérateurs hermitiens, très utiles en physique quantique.

Les corpus de l'*Analyse Mathématique* sont comme les chapitres égrenés d'un unique et grand livre – un formidable livre réalisé par la pensée humaine, mêlant concepts et poésie, en exergue duquel pourrait figurer l'intuition de **Spinoza** : « *Nous sentons et nous expérimentons que nous sommes éternels* », ou l'injonction de **Casanova** : « *Suivre le dieu* ». *Mais quel dieu ? Déclinerai-je et me comprendriez-vous, si je dis : L'intime, le réel, l'éclaircie, la rencontre, le courage intellectuel ?* Pourquoi l'intime ? Eh bien parce que le concept est avant toute chose un acte humain, et que toute résolution est la réponse d'un homme.

Le présent chapitre met en lumière, quelques outils fondamentaux, indispensables à la panoplie du physicien d'aujourd'hui, il s'ouvre sur une réminiscence : je contemple la transformée de **Fourier**, suis surpris de la place qu'elle occupe en physique, et c'est le sentiment de l'éternité qui m'étreint. L'image mentale que je me suis créé de ce concept n'a pas vieillie, plus d'une décennie s'est pourtant écoulée depuis, mais l'admirable sensation est intacte, il y va de même des concepts de conservation de l'énergie d'après **Plancherel**, de l'intégrale de **Dirichlet**, de la formule sommatoire de **Poisson**. L'image *n'est pas pour moi une image, mais une clairière toujours vivante, une éclaircie. C'est une question très serrée et difficile de savoir pourquoi un concept touche directement au système nerveux.*

Hors cadre, que deviendrait la physique, vidée de son contenu mathématique ? Rien ! Il faut par conséquent penser à faire fleurir le désert : celui-ci doit être traité non comme une étendue de sable, mais comme une mer, un océan, une masse fluide et liquide. La deuxième formule de la moyenne et l'intégrale vectorielle subtilement majorée, sont des barques, les fonctions à variables bornées des marins, les transformées de **Laplace** sont des baleiniers agiles, mais cette flotte, au lieu de vouloir prendre l'avantage sur le réel qu'elle cherche à apprivoiser, le harcèle, le pique, le repique, disparaît, surgit à l'improviste, et surtout, par-derrière, détruit ses communications, s'évanouit et réapparaît à des centaines de kilomètres, sans qu'on puisse l'observer puisqu'elle est dispersée. De temps à autre, la tentation de l'ordre s'impose, mais qui saurait l'imposer, sinon le désir d'un théoricien ? Chaque théoricien a son autonomie, sa nourriture, son eau, ses armes. Mon idéal était de faire de l'action une série de confrontations relationnelles entre le réel et moi.

Les atouts du physicien doivent être la vitesse, le sens de la déduction logique, l'habileté manuel, l'acuité visuelle, le sens de l'observation, l'intérêt pour le monde physique qui nous entoure … non la puissance de choc; ils leur confèrent là puissance stratégique plutôt que tactique. *La portée joue stratégiquement un plus grand rôle que la force.*

Cependant, personne, pas même les spécialistes, n'est capable de *voir* dans l'espace-temps de la relativité restreinte, qui a quatre dimensions, soit une de plus que l'espace dans lequel nous croyons baigner. Mais il existe un formalisme mathématique rigoureux qui permet de faire toutes les opérations et tous les calculs nécessaires à sa description. Ainsi les Mathématiques réparent-elles partiellement les manquements de nos sens. Grâce à elles, la physique a pu dépasser la contingence qui présidait à sa naissance. Elle s'est élargie. Parce qu'elles nous transportent hors des conditions très particulières de notre environnement physique immédiat, nous devons remercier les Mathématiques (et les Mathématiciens).

Les articles, même dans leur apparente simplicité, viennent de la solitude, du silence, de l'inavouable, d'une ombre mobile et jalousement protégée.

La science que j'ai envie de transmettre, c'est la Mathématique et l'astrophysique, rendues sensibles au cœur.

Ôter la Mathématique au physicien équivaudrait à priver l'astronomie de son télescope et le calligraphe de son pinceau.

Faudrait-il le dire, *la pensée* n'est rien sans quelque chose qui force à penser, qui fait violence à la pensée car, l'essentiel est hors de la pensée. *La création, c'est la genèse de l'acte de penser dans la pensée elle-même. Penser, c'est donc interpréter, c'est donc traduire.*

Les essences sont à la fois la chose à traduire et la traduction même, le signe et le sens. Elles s'enroulent dans le signe pour nous forcer à penser, elles se déroulent dans le sens pour être nécessairement pensées.

De Fourier et de Riemann, c'est ici le confluent subtil

I. – Introduction

Cet article veut présenter une théorie assez simple de la transformation de Fourier dans le cadre de l'intégration de Riemann, suffisante, pour la pratique du physicien.

Dans ce qui suit, f est une application de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach dont les restrictions aux segments $[a\,,b]$ de $\mathbb{R}$ sont $\mathbf{C}^1$ *par morceaux* (*i.e.* telles qu'il existe une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p = b$ et les fonctions f_i de classe $\mathbf{C}^1$ définies sur $[\alpha_i\,, \alpha_{i+1}]$ coïncidant avec f sur les ouverts $]\alpha_i\,, \alpha_{i+1}[$.) On note $\max \| f^{(1)} \|$, par abus d'écriture, le maximum des normes des dérivées des f_i sur $[a,\ b]$. On appelle *point critique* tout point où f ou $f^{(1)}$ ne sont pas définies ou continues.

Enfin on suppose f absolument intégrable : l'intégrale de Riemann $\| f \|$ sur $[a,\ b]$ a une limite L lorsque a et b tendent indépendamment vers $-\infty$ et $+\infty$.

a) Pour tout x, on note $\mathrm{F}(x)$ la valeur régularisée de f :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]$$

La fonction F a les mêmes propriétés que f elle-même (localement $\mathbf{C}^1$ par morceaux et absolument intégrable).

Elle n'en diffère qu'en un nombre fini de points sur tout $[a\,, b]$.

b) Pour tout x,

$$h(x,t) = h(x\,, -\ t) = f(x-\ t) + f(x+\ t)\ -\ 2\mathrm{F}(x)$$

est majoré en norme par un terme du type $H\,|t|$ pour $|t| \leq \delta$. On peut prendre δ et H indépendants de x si ce réel décrit un compact de $\mathbb{R}$ sans points critiques.

II. _ **la transformation TF de Fourier**

a) Soit ρ la constante définie par $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

L'existence de l'intégrale de $\|f\|$ sur $\mathbb{R}$ tout entier rend triviale celle de la fonction ϕ, appelée *transformée de Fourier* de f ,définie par l'intégrale impropre de Riemann ci-dessous :

$$\mathrm{TF}(f)(x) = \phi(x) = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)\,dt.$$

Cette intégrale est absolument convergente (c'est donc également une intégrale au sens de Lebesgue).

« N.B. : Certains auteurs définissent la transformée de Fourier par $\phi(-x)$ ou $\rho^{-1}\phi(2\pi x)$, etc., au lieu de $\phi(x)$. »

a) Étudions $\phi = \mathrm{TF}(f)$ comme limite uniforme de $\phi_n = \mathrm{TF}(f_n)$, transformée de Fourier de f_n, *troncature* de f à $[-n, n]$.

Théorème 1. _ *La transformée de Fourier* ϕ *de* f *est bornée, continue et nulle à l'infini. De plus* $\phi = \mathrm{TF}(\mathrm{F})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; pour tout réel x, on peut écrire $\phi_n(x) = \rho \int_{-n}^{+n} e^{itx} f(t)\,dt$.

L'intégrale définissant ϕ est limite uniforme de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$; ϕ_n est continue et bornée puisque $[-n, n]$ peut être décomposé en un nombre fini de segments sur lesquels f coïncide (à deux points près au plus) avec une fonction continue ; **le lemme 1** montre que ϕ_n est nulle à l'infini. La limite uniforme de ϕ_n est donc continue, bornée et nulle à l'infini (**Théorème d'inversion des limites de Weierstrass**).

III._ Deux lemmes classiques.

a) **Lemme 1 (Lebesgue).** _ *Pour tout* $\lambda > 0$*, on a*

$$\left\| \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)dt \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \left[2(N+1) \max \|f\| + (b-a) \max \|f'\|\right]$$

où N *est le nombre de points critiques de* f *dans* $]a, b[$ (Trivial par intégration par parties.)

b) **Lemme 2.** _ *Avec un abus d'écriture traditionnel :*

$\displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et admet un majorant S sur $\mathbb{R}$.

IV._ L'intégrale de Dirichlet.

a) **Lemme 3**. _ *Pour tous* $[a, b]$, λ, n *et* $x \in [-n, n]$ *, on a*

$$\left\| \int_a^b \frac{\sin(\lambda t)}{t} f(x+t)\, dt \right\| \leq 2(N+1)\, S \max \|f\| + (b-a)\, S \max \|f'\|$$

où N *est le nombre de points critiques dans* $]a-n, b+n[$*, et où les extremums sont pris sur* $[a-n, b+n]$.

(Trivial par intégration par parties ; λ n'intervenant pas).

b) **Lemme 4.** _ *Pour tout réel x, la régularisée $F(x)$ de f est la limite d'une intégrale de Dirichlet $I(x, \lambda)$:*

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} f(x+t)\, dt.$$

De plus, la convergence vers $F(x)$ est uniforme lorsque x décrit un compact de $\mathbb{R}$ sans points critiques.

On obtient facilement l'égalité suivante où $\lambda \geq 1$, $x \geq \alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} f(x+t)\, dt - \pi F(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} h(x, t)dt$$

$$= \int_{0}^{\alpha} \frac{\sin(\lambda t)}{t} h(x, t)dt + \int_{\alpha}^{X} \frac{\sin(\lambda t)}{t} h(x, t)dt + \int_{X}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} h(x, t)dt = I_1 + I_2 + I_3$$

L'intégrale I_3 est elle-même somme de trois intégrales. Deux d'entre elles ont un majorant en norme de la forme AX^{-1}(A est la valeur de l'intégrale de $\| f \|$sur $\mathbb{R}$) ; la troisième est bornée par le produit de $\| f(x-0) + f(x+0) \|$ par la valeur absolue d'une intégrale entre λX et $+\infty$ qui tend vers 0 avec X^{-1} ; la restriction $\lambda \geq 1$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de choisir X assez grand pour majorer $\| I_3 \|$ par $\frac{\pi\, \varepsilon}{3}$ indépendamment de λ. Dans le cas où x décrit un compact sans points critiques inclus dans un segment $[a,\ b]$, on peut également prendre X indépendamment de x si l'on remplace

$\| f(x-0) + f(x+0) \|$ par $2 \max \| f \|$ sur $[a-1, b+1]$.

Cela fait, il existe δ dans $]0, X]$ tel qu'il n'existe aucun point critique dans $[x-\delta, x+\delta]$ si $\| t \| \leq \delta$. On a donc $\|I_1\| \leq H\,\alpha$ pour $0 < \alpha \leq \delta$, et $\|I_1\| \leq \dfrac{\pi\,\varepsilon}{3}$ pour α convenablement bien choisi sans l'intervention de λ .

Ici encore α peut être pris indépendamment de x s'il décrit un « bon » compact en prenant δ strictement inférieur à la plus petite distance d'un point du compact à un point critique et $H = \max \| f' \|$ sur $[a-\delta, b+\delta]$.

Enfin, X et α étant choisis indépendants de λ (et cas échéant de x) pour avoir

$\|I_1\| + \| I_3\| < \dfrac{2\,\pi\,\varepsilon}{3}$,

le **lemme 1**, qui donne un majorant explicite en λ^{-1} applicable à $[\alpha, X]$ et à la fonction

$(x, t) \longmapsto \dfrac{h(x, t)}{t}$ qui a les mêmes propriétés que f, permet d'avoir :

$\| I(x, \lambda) - F(x) \| < \varepsilon$ pour $\lambda > \lambda_0$;

les majorants à prendre sont évidemment à calculer dans $[x-\delta, x+\delta]$ ou dans $[a-\delta, b+\delta]$

V. _ La formule d'inversion de Fourier.

La transformée de Fourier est « presque » inversible.

Théorème 2. _ *Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans un Banach, absolument intégrable et localement* **C¹** *par morceaux, si ϕ est sa transformée de Fourier* TF(f), *on a pour tout réel x* :

$$\rho \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-isx}\,\phi(s)ds = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] = F(x).$$

Si ϕ est absolument intégrable elle a une transformée TF(ϕ) :

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}\,\phi(s)ds = \frac{1}{2}\left[f(-x-0) + f(-x+0)\right] = F(-x).$$

a) _ Posons $g(t) = f(x+t) = f(u)$, et soit Ψ la transformée de Fourier de g définie, pour tout réel s, par $\rho \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\, g(t)dt \;=\; \rho\, e^{-isx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ius} f(u)du \;=\; e^{-isx}\,\phi(s)$.

Si Ψ_n est définie de façon analogue à ϕ_n, on peut écrire

$$J_n(x,\lambda) = \rho \int_{-\lambda}^{+\lambda} \Psi_n(s)ds$$

$$= \rho^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} \left[\int_{-n}^{+n} e^{ist}\, g(t)dt \right] ds$$

$$= \rho^2 \int_{-n}^{+n} \left[\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{its}\, ds \right] g(t)dt$$

$$= 2\,\rho^2 \int_{-n}^{+n} \sin(\lambda t) g(t) dt \,.$$

b) _ La convergence uniforme de Ψ_n vers Ψ montre que Ψ est intégrable sur $[-\lambda\,, \lambda\,]$ et que $J_n(x\,,\lambda)$ converge vers

$$\rho \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-isx}\,\phi(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} f(x+t)dt = \mathrm{I}(x\,,\lambda).$$

Le **théorème 2** résulte donc aussitôt du **lemme 4**.

<u>*Remarque*</u> : La limite figurant dans la formule d'inversion de **Fourier**, appelée *valeur principale de* ***Cauchy***, n'est pas une intégrale impropre, qui n'existe pas nécessairement. Si tel est le cas (ce qui est assez fréquent), alors ϕ admet elle-même une transformée de **Fourier** et l'on sait que cette dernière, égale à $F\,(-\,x)$, doit être continue. Par suite f doit être continue. Une condition suffisante est par exemple que f soit à valeurs dans un espace de **Hilbert**, de classe $\mathbf{C}^2$ et que f et $f\,'$ soient bornées et absolument intégrables.

VI. _ La conservation de l'énergie (Plancherel).

a) Le théorème suivant accentue la symétrie (partielle) entre f et sa transformée $\phi = \mathrm{TF}\,(f)$:

Théorème 3. _ *Si f est complexe, de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, satisfait aux conditions du* ***théorème 2*** *et si $\phi = \mathrm{TF}\,(f)$, on peut écrire l'égalité de Plancherel :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx$$

Regroupons les hypothèses : f est complexe, de classe C^1 sauf sur un ensemble dont toute partie bornée est finie ; en tout point de cet ensemble, f et $f\,'$ possèdent des limites à gauche et à droite ; $|f|$ et $|f|^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. On notera :

$< f , g >$ l'intégrale de $f(x)g(x)$ sur $\mathbb{R}$ et $q(f) = < f , f > = M$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$, et intégrons $|\,\phi_n\,|^2$ sur $[-\lambda , \lambda\,]$:

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} [\,\overline{\phi_n}\,\phi_n\,](t)dt = \rho^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_{-n}^{+n} \int_{-n}^{+n} e^{\,it(y-x)} f(y)\,\overline{f(x)}\; dydxdt$$

$$= \rho^2 \int_{-n}^{+n} \int_{-n}^{+n} \left[\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{\,it(y-x)}\, dt\right] f(y)\;\overline{f(x)}\; dydx$$

$$= \int_{-n}^{+n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-n}^{+n} \frac{\sin \lambda(y-x)}{y-x} f(y)dy\right] \overline{f(x)}\; dx$$

$$= \int_{-n}^{+n} I_n\,(x\,,\,\lambda)\;\overline{f(x)}\; dx.$$

a) _ $I_n(x, \lambda)$ est l'intégrale de **Dirichlet** associée à la fonction f_n coïncidant avec f sur $[-n, +n]$ et nulle ailleurs. Lorsque λ tend vers l'infini, $I_n(x, \lambda)$ tend vers $F_n(x)$, égal à $f(x)$ pour $|x| \leq n$, sauf en un nombre fini de points .Si nous faisons tendre λ vers l'infini, le premier membre a pour limite $q(\phi_n) \leq +\infty$.

b) _ Le segment $[-n, +n]$ du second membre peut être décomposé en une réunion d'intervalles de mesure arbitrairement petite entourant les points critiques pour lesquels une majoration de $I_n(x, \lambda)$ obtenue par le **lemme 3** conduit à une contribution négligeable , et d'un compact sans points critiques sur lequel la convergence vers $F_n(x)$ est uniforme d'après le **lemme 4.** Par suite

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} |\phi_n(t)|^2\, dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-n}^{+n} F_n(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \int_{-n}^{+n} |f(x)|^2\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = q(f) = M.$$

Pour n tendant vers l'infini et pour tout λ , on a donc

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} |\phi_n(t)|^2\, dt \leq M.$$

Faire tendre λ vers l'infini justifie l'existence de $q(\phi)$ et prouve une égalité du type Bessel , à savoir $q(\phi) \leq q(f)$.

a) _ Si $f(x) = 0$ pour $|x| > n$, ϕ est égale à la transformée de Fourier ϕ_n de $f_n = f$, et les égalités du c) montrent que le **théorème 3** est vrai pour une fonction f à support compact.

b) _ La forme $q(u) = \langle u, u \rangle$ est hermitienne positive , d'où

$$|q(u+v) - q(u)| \leq q(v) + 2\,|\langle u, u \rangle|$$

$$\leq q(v) + 2\sqrt{q(u)\, q(v)}.$$

Si Ψ_n est la transformée de **Fourier** de $g_n = f - f_n$

on sait que $q(\phi_n) = q(f_n) \leq M$

et que $q(\Psi_n) \leq q(g_n)$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque $q(f)$ existe. En posant donc $u = f_n$ et $v = g_n$, puis $u = \phi_n$ et $v = \Psi_n$, on a facilement :

$$\left|q(f) - q(\phi)\right| \leq q(g_n) + 2\sqrt{Mq(\psi_n)} + q(\Psi_n) + 2\sqrt{Mq(\psi_n)} \longrightarrow 0,$$

d'où le **Théorème de Plancherel** $q(\phi) = q(f)$.

c) _ Si g vérifie les hypothèses du **Théorème 3** , si $\Psi = \mathrm{TF}(g)$, si $\theta = \rho^{-1}\phi\,\Psi$, si h est la *convolée* $f * g$ de (f, g) définie par

$$h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(s-x)\,dx$$

si $k_s(x) = \overline{g}(s-x)$ et $\tau_s = \mathrm{TF}(k_s)$,

alors $h(s) = \langle k_s, f \rangle = \langle \tau_s, \phi \rangle$ par polarité , et vérifie

$$h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,\overline{\tau_s}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist}\phi(t)\,\Psi(t)\,dt\,.$$

Par suite h est la transformée de **Fourier** de $\theta(-t)$. Si le **Théorème d'inversion** est valide, c'est que $\theta = \mathrm{TF}(h)$, soit $\mathrm{TF}(f * g) = \rho^{-1}\mathrm{TF}(f)\,\mathrm{TF}(g)$.

Nous admettrons que c'est bien le cas : la transformée de **Fourier** traduit ici la convolution par une multiplication. Notons aussi que le **Théorème 3** peut s'étendre aussitôt au cas d'un espace E de **Hilbert**.

VII. _ La formule sommatoire de Poisson.

a) Revenons au cas d'une fonction à valeurs vectorielles dans un **Banach**, supposée de classe C^1, telle que f' soit aussi absolument intégrale, pour établir une relation importante – indépendante de ce qui précède – aux nombreuses applications, notamment en Théorie des nombres. **Dirichlet** l'utilisa, par exemple, pour démontrer en 1837 la Loi de Réciprocité Quadratique de **Legendre – Gauss**.

Théorème 4. _ *Si f est vectorielle,* C^1*, absolument intégrable ainsi que sa dérivée, on peut écrire pour tout réel a et pour tout* $\lambda > 0$ *la formule sommatoire de* ***Poisson*** *:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(a+\frac{p}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\rho} \lim_{n \to +\infty} \sum_{-n}^{+n} \exp(-2ip\pi\lambda a)\,\varphi(2p\pi\lambda).$$

(Signalons qu'il suffit en fait que f soit continue, absolument intégrable et de variation bornée sur $\mathbb{R}$).

b) _ Les hypothèses montrent aussitôt que f a une limite en $-\infty$ et $+\infty$, nécessairement nulle . Or une intégration par parties permet de calculer facilement la transformée de **Fourier** Ψ de f' qui satisfait à l'égalité importante:

$$\mathrm{TF}\,(f')(x) = \Psi(x) = -\,ix\,\phi(x) = -\,ix\mathrm{TF}\,(f)(x).$$

c) _ Définissons une fonction P_n, bien connue en théorie des séries de **Fourier**, par l'égalité

$$P_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}.$$

La propriété du **b)** montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P[\,\phi(p) + \phi(-p)] = i[\,\Psi(p) - \Psi(-p)] = -2\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(px) f'(x)dx,$$

D'où finalement

$$\phi(0) - \sum_{p=-n}^{+n} \phi(p) = 2\rho \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) f'(x)dx.$$

Un calcul simple montre que P_n, qui est de classe $\mathbf{C^1}$, est majorée indépendamment de n et de x. Il suffit de le prouver pour $x \in [0\,,\pi]$ La valeur absolue de $P_n(x)$ peut alors s'écrire :

$$\left| -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2} + P'_n(t)\right] dt \right| = \left| -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin(\frac{t}{2})} dt \right|$$

$$\leq \frac{\pi}{2} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right] \sin(2n+1)\frac{t}{2}\, dt \right| + \left| \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t} dt \right| \leq \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \int_0^\pi \left[\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right] dt + S.$$

(Rappelons que S est défini dans le **lemme 2**).

En fait P_n admet une limite P, de période 2π, impaire, définie par $P(x) = \dfrac{(\pi - x)}{2}$ sur $]\,0, 2\pi\,[$.

c) On sait en effet que

$$P(x) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4} + \varepsilon_n$$

Et que, pour $0 < x < \pi$,

$$P_n - \frac{\pi - x}{2} - \varepsilon_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left[\frac{1}{2} + P'_n(t)\right] dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

tend vers 0 par le **lemme 1,** uniformément sir tout segment du type $[\alpha , \pi]$ pour $0 < \alpha < \pi$. Or P et P_n sont bornées et $f\,'$ est absolument intégrable ; en résultent existence et valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)f'(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{+n} P(x)f'(x)dx$$

$$= (2\rho)^{-1}\left[\phi(0) - \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=-n}^{+n} \phi(p)\right]$$

d) Or nous pouvons calculer cette intégrale par parties sur un segment $[2p\pi , 2(p+1)\pi]$, puis sommer sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} P(x)f'(x)dx = -\frac{\pi}{2}\,[f(2p\pi)+f\{2(p+1)\pi\}] + \frac{1}{2}\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} f(x)dx\,,$$

ce qui implique facilement l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)f'(x) = -\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(2p\pi) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Nous avons donc un cas particulier de la formule de Poisson :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(2p\pi) = \rho \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{+n} \phi(p).$$

d) _ Pour tout $h > 0$, la transformée de **Fourier** de la fonction définie $f(hx)$ est clairement $h^{-1}\phi(h^{-1}(x))$. On en déduit aussitôt une seconde forme de l'égalité de Poisson pour tout $\lambda > 0$ en posant $h = \dfrac{1}{(2\pi\lambda)}$:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{p}{\lambda}\right) = 2\pi\lambda\rho = \frac{\lambda}{\rho} \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{+n} \phi(2p\pi\lambda)$$

e) _ Pour tout a, la transformée de Fourier de $f(a+t)$ est $\exp(-ita)\phi(t)$; le **Théorème 4** résulte donc immédiatement de la formule du f). Le cas particulier suivant est remarquable ; il est équivalent au cas général : $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{p}{\rho}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{+n} \phi\left(\frac{p}{\rho}\right)$

Beyond the details, there is the larger drama of connections achieved between ideas.

Derrière les détails se dissimule un drame plus général, celui des relations nouées entre les idées.

VIII. _ **Bibliographie sommaire**

Le livre fondamental est évidemment « *Introduction to the theory of Fourier integrals* » de F.C. TITCHMARSH (Oxford, University Press, 1937). Tous les traités d'analyse moderne consacrent une section au sujet ; il faut notamment citer « *Intégration, Analyse de Fourier, Probabilités, Analyse Gaussienne* » de Paul MALLIAVIN et H. AIRAULT (Masson, 1993). L'intégrale de rigueur y est inévitablement celle de Lebesgue, ce qui rend parfois assez malcommode la consultation de ces ouvrages de référence pour résoudre tel problème concret portant sur des fonctions « de physicien ».

Le livre de Michel HERVE « *Transformation de Fourier et Distributions* », (P.U.F.,1986) utilise également l'intégrale de Lebesgue et le confort des théorèmes de Fubini et de convergence dominée, mais reste plus accessible par une volonté d'être près du calcul et des possibilités d'étudiants non spécialistes. Il constitue une bonne première introduction à l'intégrale de Fourier et à la théorie des distributions.

Parmi les ouvrages consacrés presque exclusivement à ce dernier point de vue, notons le remarquable pamphlet « An introduction to Fourier *analysis and generalized functions* », de M.J. LIGHTHILL (Cambridge University Press, 1958).

Acuité musicale de la transformée de Laplace dans les espaces de Banach et une charge de lumière dans la seconde formule de la moyenne

Il y a des choses qui ne peuvent être apprises rapidement, et le temps, qui est notre seul bien, sert à payer cher leur acquisition. Ce sont les choses les plus simples, et, parce qu'il faut pour son goût personnel, d'assez bonnes études scientifiques, en particulier en Mathématiques, pour les connaître, le peu de *neuf* que chaque chercheur tire de l'existence lui est très coûteux, et c'est le seul héritage qu'il ait à léguer.

Je propose ici, un itinéraire de deux univers pour un même objet : une théorie assez simple de la *transformation de* ***Laplace*** dans le cadre de l'intégration de **Riemann** suffisante pour la pratique du physicien, et la seconde formule de la moyenne. *Après tout, les Mathématiques sont devenues la grammaire de la physique, et les règles de cette grammaire doivent être apprises par ceux qui veulent décrire la nature. Il n'y a pas d'alternative.* Telle un fleuve qui se jetterait dans la mer, j'essaie de faire jaillir la musique de ces deux concepts fondamentaux, du sol, je la suis (du verbe suivre) dans le lit qu'elle y creuse, je l'observe s'élargir et finalement rejoindre le continent des concepts mathématiques retenus pour la physique.
Le but étant de vraiment parler des sciences pour ne pas créer une apathie chez les jeunes, une "acédie", grand mot médiéval, sur laquelle **Dante** et **saint Thomas d'Aquin** ont écrit des choses formidables. Devrais-je le dire, avec la science, c'est l'aube, c'est l'univers qui change tous les lundis matins, pour ainsi dire. Il n'est pas si facile de comprendre comment s'opère la transmission et pourquoi les théories anciennes n'ont rien perdu, pour certaines, de leur provocation et de leur vitalité, de leur puissance de choc.

Transformée de Laplace dans les espaces de Banach, Seconde formule de la moyenne, *je dirai quelque jour vos naissances latentes.* Ces deux concepts fondamentaux sont bien évidemment des classiques. Mais le classique peut aussi naître aujourd'hui. Que veut dire classique ? Cela signifie un exercice strictement inépuisable. On le relit, on le redit, on le réinterprète, et, tout à coup, il est presque toujours nouveau. Et cela dans un sens pas du tout métaphorique. Ce n'est pas simulé, c'est une expérience quasi physiologique, le choc du déjà-vu qui est tout à fait nouveau. On reprend un grand moment de Laplace, ou de la seconde formule de la moyenne, et on se dit : « Mais oui, je connais ça par cœur », et je ne connais pas du tout ; je n'avais pas compris. Cette puissance de renouveau est une des définitions du classique.

Je me soumets à la composition de cet article pour ne pas manquer de responsabilité pédagogique envers les jeunes, envers le public éduqué. Je le compose et le publie parce que j'ai peur que mon intelligence se sclérose. Grâce à la publication, je peux élargir mon champ de vision, faire appel à d'autres voix, voir le monde avec l'aide d'autres regards. La Mathématique et la physique nous renvoient à notre propre médiocrité. Il est difficile, quand on passe le plus clair de son temps avec **Lebesgue**, **Schwartz** ou, **la Relativité Générale d'Einstein** de se tambouriner la poitrine. La chose que l'on sait, face au génie, c'est qu'on n'est pas soi-même un génie. Il n'y a pas une seule clé. Mais de nos jours, les plus doués, les plus obsédés par l'absolu sont les Mathématiciens. Ce sont les princes de l'esprit.

La valeur de la transformée TL(f)(p) sera notée L(p)[$p \in \mathbb{C}$]. Certaines propriétés de TL stables par restriction de $\mathbb{R}^+$ à $]a, b[$ seront étendues à cette situation plus générale.

I _ Seconde formule de la moyenne *une idée de* Pierre Ossian Bonnet - 1850

Soit sur $[a, b]$, φ *décroissante positive et* f *réelle et Riemann-intégrable ; il existe alors* $c \in [a, b]$ *tel que* $\int_a^b \varphi f = \varphi(a) \int_a^c f$.

Soit $F(x)$ l'intégrale de f sur $[a, x]$. On considère une subdivision régulière (x_i) de $[a, b]$, puis l'encadrement

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i)[F(x_{i+1}) - F(x_i)] \quad (\textit{transformation d'}\textbf{\textit{Abel}})$$

$$= \varphi(x_{n-1})F(b) + \sum_{i=0}^{n-2} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})]\, F(x_{i+1}) \in [\varphi(a) \min F, \varphi(a) \max F]$$

puis la majoration $\left(\text{où } \|f\| = \sup |f|\right)$.

$$\left| A_n - \int_a^b \varphi f \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+1} [\varphi(x_i) - \varphi]\, f \right|$$

$$\leq \|f\| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\|f\|(b-a)[\varphi(a) - \varphi(b)]}{n} = 0$$

et l'on conclut par continuité de F.

Remarques _ Weierstrass en a déduit une formule pour fonctions simplement monotones en substituant $\varphi - \varphi(b)$ à φ.

2 _ Le travail mathématique ressemble à un exercice de grammaire avec des règles extrêmement strictes. Partant des assertions de base qu'il a choisies, le mathématicien

construit une chaîne de nouvelles assertions, jusqu'à ce qu'il en trouve une particulièrement jolie. Ses collègues, appelés à admirer l'assertion nouvellement engendrée, diront alors : « Quel beau théorème ! » …

II _ Comment majorer *subtilement* une intégrale vectorielle.

Cette preuve très rapide, *sans le détour par une somme de* ***Riemann***, induit une relation comparable à celle d'**O. Bonnet** portant sur $B(\varphi, f)$ où f et φ sont *vectorielles*, B *bilinéaire* de norme $\|B\|$, f *intégrable* et φ *à variation bornée* (il existe un V majorant les sommes $\sum \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\|$ pour toute subdivision (t_j) de $[a, b]$), donc réglée (si $\varphi(x+0)$ n'existe pas, construire (p_m, q_m) avec :

$a \leq x < p_{m+1} < q_{m+1} < p_m < q_m < b$, $\|\varphi(q_m) - \varphi(p_m)\| \geq \alpha > 0$) et finalement *Riemann-intégrable.* On posera $\|f\| = \sup |f|$.

Soit $F(x)$ l'intégrale de f sur $[a, x]$.

L'inégalité

$\|\varphi(x_i) - \varphi\| \leq \|\varphi(x_i) - \varphi(\xi_i)\| + \dfrac{1}{n}$ majore $\sum \|\varphi(x_i) - \varphi\|$ par V + 1 et la somme des intégrales des $B(\varphi(x_i) - \varphi, f)$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ par $\dfrac{\|B\|(b-a)(V+1)\|f\|}{n}$:

$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} B\,[\varphi(x_i), F(x_{i+1}) - F(x_i)]$ tend donc vers l'intégrale de $B(\varphi, f)$. Une transformation d'**Abel** (symétrique en a et b) permet d'écrire A_n sous la forme :

$$B[\varphi(b), F(b)] - B[\varphi(a), F(a)] + \sum_{i=0}^{n-1} B[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1}), F(x_{i+1})].$$

Borner $\sum$ par $\|B\|V\|f\|$ conduit enfin aux majorations

$$\begin{cases} \| B[\varphi(a), F(a)] - B[\varphi(b), F(b)] + \int_a^b B(\varphi, f) \| \leq \| B \| V \| f \| \\ \| \int_a^b B(\varphi, f) \| \leq \| B \| [V + \| \varphi(b) \|] \max \| \int_a^b f \| \end{cases}$$

Remarques _ Que l'intégrale de $B(\varphi, f)$ soit limite de A_n pour φ *intégrable* résulte du *critère vectoriel de Darboux :* $\sum (x_{i+1} - x_i) \text{diam } \varphi([x_i, x_{i+1}]) \longrightarrow 0$.

2 _ La chaîne d'assertions intermédiaire constitue la *démonstration* du théorème, mais un théorème d'énoncé simple et concis requiert souvent une démonstration extraordinairement longue. *La longueur des démonstrations* est ce qui rend la mathématique intéressante, et elle constitue un fait d'une importance philosophique fondamentale. À cette longueur des démonstrations se rattachent le problème de la complexité algorithmique …

III _ *Bien que fort abstraites,* les fonctions à variation bornée *sont aussi concrètes*

Une fonction *monotone* est évidemment à variation bornée. Il en est de même d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par *morceaux.* Pour que φ définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ soit à variation bornée *avec un même V sur tout* $[a, X] \subset [a, b[$, il lui suffit d'être *monotone bornée* ou d'avoir une *dérivée continue absolument intégrable* (prendre alors pour V l'intégrale de $\| \varphi' \|$ sur $[a, b[$).

Soit Λ l'ensemble des complexes *nul* ou *de partie réelle* $r > 0$; pour $p \in \Lambda$ et $0 \leq a < b \leq +\infty$, la fonction définie par $\varphi(t) = e^{-pt}$ est à variation bornée par le dernier critère : l'intégrale de $|\varphi'|$ sur $[a, b[$ est bornée par 0 ou $r^{-1}|p|$. Dans tous les cas $\left|\varphi(t)\right| = e^{-rt}$ est majoré par 1. À t fixé, la différentielle de l'application $p \longmapsto \varphi(t)$ est la multiplication par le complexe $-t\,e^{-pt}$ de module $t\,e^{-rt} \leq t$.

Soit $\Lambda_\theta \subset \Lambda$ formé de 0 et des complexes d'argument borné par $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pour $(p, q) \in \Lambda_\theta{}^2$ et $t \in [a, b[$,

on a

$$\left|e^{-qt} - e^{-pt}\right| \leq \left|q - p\right|, \text{ V } + \left|\varphi(t)\right| \leq \frac{1}{\cos\theta} + 1 = \text{A}_\theta.$$

Remarque _ Il ne faudrait pas croire que le jeu mathématique est arbitraire et gratuit. Les diverses théories mathématiques ont entre elles de nombreuses relations : les objets d'une théorie peuvent être réinterprétés dans une autre théorie, ce qui conduit à des points de vue nouveaux et fructueux…

IV _ La Transformation de Laplace s'applique à ce processus.

Pour f vectorielle intégrable sur $]a, b[\subset \mathbb{R}^+$, on peut définir sur Λ une fonction L = TL(f) par l'égalité $\text{L}(p) = \int_a^b e^{-pt} f(t)dt$ ($p = 0$ ou $r = \Re e\, p > 0$).

Sur Λ_θ L est uniformément continue ; elle y tend vers 0 avec $\frac{1}{p}$ (cas particulier : $p \geq 0$ puisque $\Lambda_0 = \mathbb{R}^+$).

Il suffit de se placer sur Λ_θ.

Soit $\varepsilon > 0$, $[\delta, X] \subset]a, b[$ tel que pour tous $X \leq u \leq v < \delta$ on ait :

$\text{A}_\theta \left\| \int_u^v f \right\| < \varepsilon$, d'où $\left\| \int_u^v \varphi f \right\| < \varepsilon$, ce qui implique l'existence de L.

Pour $(p, q) \in {\Lambda_\theta}^2$, on a

$$\begin{cases} \left\| \int_a^\delta e^{-pt} f(t)dt \right\| \leq \varepsilon \\ \left\| \int_a^\delta e^{-qt} f(t)dt \right\| \leq \varepsilon \\ \left\| \int_X^b e^{-pt} f(t)dt \right\| \leq \varepsilon \\ \left\| \int_X^b e^{-qt} f(t)dt \right\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\left\| \int_b^X \left[e^{-qt} - e^{-pt}\right] f(t)dt \right\| \leq X \left|q-p\right| \int_\delta^X \|f\|, \text{ puis } \left\|L(q) - L(p)\right\| < 5\,\varepsilon$$

pour p et q assez proches dans Λ_θ.

Cette généralisation du résultat I-1° de **D. Duverney** n'est pas extensible à $\overline{\Lambda}$ (ainsi le *sinus cardinal* $\frac{\sin t}{t}$ est-il intégrable sur $[0, +\infty[$ bien que $L(i)$ n'existe pas ici : minorer par $\frac{1}{2n}$ l'intégrale sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ de $\frac{\sin^2 t}{t}$) mais implique l'existence de continuité de L pour $\Re e\ (p - q) > 0$ si $L(q)$ existe ($\Re e\ q$ est une « *abscisse de convergence* »).

Reste à étudier la limite de L dans Λ_θ pour $|p|$ infini. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\delta \in]a, b[$ tel que $A_\theta \left\| \int_a^\delta f \right\| < \varepsilon$, d'où $\left\| \int_a^\delta e^{-pt} f(t)dt \right\| < \varepsilon$.

Si $|p| > R > \dfrac{1}{\delta \cos \theta}$,

alors $r > s = R \cos \theta$; sur chaque segment $[\delta, X] \subset [\delta, b]$

on a

$r\,e^{-rt} < s e^{-st}$; on peut y écrire $\left|\varphi(X)\right| = e^{-rX} \leq e^{-r\delta} \leq e^{-(\delta \cos \theta)R}$, puis majorer l'intégrale $\int_\delta^X |\varphi'| = \dfrac{|p|}{r} \int_\delta^X r\,e^{-rt}\,dt \leq \dfrac{1}{\cos\theta} \int_\delta^X s e^{-st} dt < \dfrac{e^{-(\delta\cos\theta)R}}{\cos\theta}$, d'où l'encadrement

$\| \int_\delta^X e^{-pt} f(t)dt \| \leq K \left[|\varphi'(X)| + \int_\delta^X |\varphi'| \right] \leq K A_\theta e^{-(\delta\cos\theta)R} \leq \varepsilon$ (quel que soit X) et

donc $\|L(p)\| \leq 2\,\varepsilon$ pour tout $p \in \Lambda_\theta$ tel que $|p| > R(\varepsilon, \theta)$.

Remarques _ Si f est *absolument intégrable sur* $]a, b[$, L est clairement bornée et uniformément continue sur $\overline{\Lambda}$.

2 _ Le mathématicien _ le vrai _ investit beaucoup dans son art : c'est une sorte de yoga exigeant, ascétique même. Les concepts et les relations étranges occupent la pensée verbale ou non, consciente ou non … L'envahissement de l'intellect par la floraison de la pensée mathématique et l'étrangeté de cette pensée font du mathématicien un être un peu à part…

V _ Différentielle et Primitive d'une Transformée de Laplace.

Je vais d'abord justifier la différentiation formelle de L par rapport à la variation complexe p pour $\Re e\, p > 0$, avec une hypothèse plus restrictive sur f : je suppose aussi $tf(t)$ *intégrable sur* $]a, b[\subset \mathbb{R}^+$ (réciproquement cela suffit si $f \in O(1)$ en a car t^{-1} est décroissante).

Formellement,

$$L'(p) : h \longmapsto -h \int_a^b te^{-pt} f(t)dt.$$

Cette intégrale converge et $L(p+h) - L(p) - L'(p)(h)$, transformée de **Laplace** de θf où $\theta(t) = e^{-ht} - 1 + ht$, est un $o(h)$ pour $h \sim 0$ car $\Psi(t) = e^{-ht}\,\theta(t)$ et l'intégrale de $|\Psi'|$ y sont en $O(h^2)$ (conclure par l'inégalité du II).

Ces estimations reposent sur la majoration suivante :

$$\left| e^{-ht} - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-ht)^p}{p\,!} \right| \leq \sum_{0}^{+\infty} \frac{|ht|^{n+q+1}}{(n+q+1)\,!} \leq |ht|^{n+1} \, exp\left(|ht|\right).$$

{Si $0 < r - |h| = s \sim r$, $|\Psi(t)| \leq |ht|^2 \, e^{-st} \in O(h^2)$ sur $[a, b]$ (b fini ou non) et $|\Psi'(t)| \leq |h|^2 \, P(t) \, e^{-st}$ (P polynôme) : l'intégrale de $|\Psi'|$ sur $\mathbb{R}^+$ est donc aussi en $O(h^2)$.}

Savoir dériver L sur $\mathbb{R}^*_+$ permet ici d'en calculer les primitives ; si en effet $p \geq 0$, si $t^{-1} f(t)$ est *intégrable* sur $]a, b[$ (il suffit que $f(t) \in O(t)$ en a), on peut écrire $\int_a^b \frac{e^{-pt}}{t} f(t)dt = \int_p^{+\infty} L$ (pour $p > 0$ et $T \geq 0$, poser $H(p, T) = \int_a^b \frac{e^{-pt}}{t} f(t)dt - \int_p^T L$, vérifier que $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$, puis que $H(p, T) = H(T, T)$ tend vers 0). Le résultat pour $p = 0$ équivaut d'ailleurs au cas général ; on peut en déduire trivialement l'intégrale de L sur $[0, p]$.

Remarque : Parce qu'elles sont longues, les démonstrations mathématiques sont difficiles à inventer. Il faut construire, sans jamais se tromper, de longs enchaînements d'assertions, et surtout y voir clair. Y voir clair, cela veut dire deviner ce qui est vrai et ce qui est faux, ce qui est utile et ce qui ne l'est pas, sentir quelles sont les bonnes définitions à introduire, et trouver les assertions-clefs qui permettent de développer une théorie de manière naturelle …

VI _ La Transformée de Laplace se *matérialise* dans une intégrale.

Soit désormais $a = 0$, $b = +\infty$ et F l'intégrale sur $[0, t]$ de f. Si f est *continue,* une intégration par parties donne

$$\mathrm{L}(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{F}(t)dt \quad \text{où} \quad \mathrm{F}(t) = \int_a^t f, \quad \mathcal{R}e\, p > 0.$$

Ce résultat est général car, pour tous (u, v) *intégrables* et B *bilinéaire continue,* on a (*cf.* la remarque du II) *:*

$$\begin{cases} \mathrm{B}[\mathrm{U}(b), \mathrm{V}(b)] = \displaystyle\int_a^b [\mathrm{B}(\mathrm{U}, v) + \mathrm{B}(u, \mathrm{V})] \\ \text{où} \\ \mathrm{U}(t) = \displaystyle\int_a^t u, \ \mathrm{V}(t) = \int_a^t v \end{cases}.$$

Poser $u = \varphi'$ et $v = f$ dans cette égalité, résultant de

$$\int_a^b \mathrm{B}(\mathrm{U}, v) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{A}_n$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{B}[\mathrm{U}(x_i), \ \mathrm{V}(x_{i+1}) - \mathrm{V}(x_i)]$$

$$= \mathrm{B}[\mathrm{U}(b), \ \mathrm{V}(b)] + \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{B}[\mathrm{U}(x_i) - \mathrm{U}(x_{i+1}), \ \mathrm{V}(x_{i+1})],$$

(triviale ici, U étant uniformément continue], car

$\left\| \mathrm{B}[\mathrm{U}(b), \mathrm{V}(b)] - \int_a^b [\mathrm{B}(\mathrm{U}, v) + \mathrm{B}(u, \mathrm{V})] \right\|$ est la limite de

$$\left\| \sum_i \mathrm{B}[\mathrm{U}(x_{i+1}) - \mathrm{U}(x_i), \ \mathrm{V}(x_{i+1}) - \mathrm{V}(x_i)] \right\| \leq \|\mathrm{B}\| \, \|u\| \, \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Remarque : Plutôt qu'une collection de théories séparées, comme la théorie de l'intégration, la topologie ou l'algèbre, chacune avec ses assertions de base particulières, la mathématique forme un tout cohérent. La mathématique est donc un vaste royaume, et ce royaume appartient à ceux qui y voient clair. Le *voyant*, celui qui a l'*intuition* et la puissance mathématique, en éprouve un grand sentiment océanique…

VII _ La Convolution et l'Inversion des Transformées de Laplace se réalisent.

Pour $r > 0$, $s \in \mathbb{R}$, f vectorielle bornée, localement C^1 par morceaux, sur $\mathbb{R}^+$, on dispose des égalités de ***Bromwich*** :

$$\pi\,[f(s-0) + f(s+0)] = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{(r+it)s}\, \mathrm{L}(r+it)\,dt$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{r-i\lambda}^{r+i\lambda} e^{ps}\, \mathrm{L}(p)\,dp.$$

Posant $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \\ \overline{f}(x) = e^{rx} f(-x) \end{cases}$,

$\mathrm{L}(r+it)$ est le quotient par δ de la valeur de la *transformée de* ***Fourier*** $\mathrm{TF}(\overline{f})(t)$ de $\overline{f}$; il suffit d'user de la formule d'inversion de **Fourier** qui y est démontrée dans tout bon livre de taupe.

La *convolution* de **Fourier** a aussi son homologue

$$h(x) = (f * g) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Alors $\overline{h}$ est la convolée de $\overline{f}$ et de $\overline{g}$, au sens de **Fourier** ; sous certaines conditions convenablement choisies., on a :

$$\mathrm{TL}(f * g) = \mathrm{TL}(f)\ \mathrm{TL}(g)$$

Remarque _ Ce que j'essaie de montrer, à travers cet article fort modeste, c'est que *même* des mathématiques de nos classes préparatoires, il émane des lueurs esthétiques, et qu'elles peuvent être vraiment fascinantes sur le plan intellectuel. Si l'on veut, on peut y trouver en germe le vertige des ascensions vers l'abstraction qui sont ensuite prolongées très loin par la mathématique de pointe…

VIII _ Deux fenêtres ouvertes à la formule de Bonnet.

α) _ Si φ est positive décroissante et f vectorielle, on peut facilement déduire des méthodes ci-dessus la relation

$$\int_a^b \varphi f \in \varphi(a)\ \overline{\mathrm{Conv}\left\{\int_a^x f,\ x \in [a, b]\right\}}\ .$$

Elle donne la continuité uniforme de L sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que des critères suffisants d'intégrabilité (φ décroissante positive et f vectorielle intégrable, ou φ décroissant vers 0 et f vectorielle aux intégrales sur $[X, X'] \subset [a, b]$ uniformément bornées) analogues aux énoncées d'**Abel** en théorie des séries.

β) _ On peut étendre autrement la formule d'**O. Bonnet**, pour $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$
soit sur $[a, b]$ φ *décroissante positive et* f *réelle et Riemann-intégrable ; il existe alors* $c \in [a, b]$ *tel que l'égalité ci-dessous ait un sens et soit vraie :*

$$\int_a^b \varphi f = \varphi(a) \int_a^c f$$

L'existence de l'intégrale résulte du II (*cf.* **Laplace**) et celle de c de l'appartenance à $(\varphi(a) \inf F, \varphi(a) \sup F)$ des intégrales de φf sur tout $[a, X] \subset [a, b[$. Ce résultat s'étend à φ *monotone bornée* en substituant $\varphi - \lim \varphi$ à φ.

Last but not least _ La formation du goût pour la physique réside justement dans une *imbrication* fascinante du réel le plus « réel » et de l'abstrait le plus « abstrait ». En physique, la progression vers l'abstrait (que l'on retrouve aussi en Mathématiques et en philosophie) commence *et se termine* toujours par une immersion dans le concret. Il faut toujours en revenir à notre monde réel.

La liberté, comme la Mathématique, est fille de l'*imagination*.

La page blanche ! ce grand désert à traverser, fut bel et bien traversé : joie, ravissement, quelques traces où triomphe une extase défiant les concepts. Un *article* fut-il à caractère pédagogique a-t-il jamais fini de dire toute la conviction de son auteur ? La réponse reste muette. Mais de l'autre côté de la passion de l'homme, ma géométrie du sensible s'ouvre sur une métaphore et se referme sur une synthèse provisoire, saisie par une pensée avant la pensée.

Derrière les équations, se cachent les gouttes rouges de mon sang, les battements intimes de mon être. Conceptualisation ou abstraction, la science naît du jour où des erreurs, des échecs, des surprises désagréables, nous poussent à regarder le réel de plus près. Mais son architecture se dérobe parfois, aux arguties des humains : en deçà ou au-delà de la théorie, elle manifeste la simplicité d'une communion avec le cosmos aussi bien qu'avec la culture dans ce qu'ils ont de plus rudimentaire, de plus rebelle à l'interprétation.

La relative simplicité de ces équations, la concision de ces symboles, le charme intuitif de ces raisonnements, sont loin d'être « pauvres », au contraire, leurs richesses ont l'immédiateté d'une évidence qui suspend le commentaire. Ils ne discutent pas avec le bonheur ou le malheur, ils se contentent d'apparaître, d'indiquer ce qui sera pour vous – visiteurs ou interprètes – une série de questions: « quel sens donné à cette intégrale ? » ; « comment prouver l'existence de cette série ? »; « quel est le théâtre des opérations de cette fonction ? » ; « pourquoi cette pluie de *lemmes* détachés de sa source ? » Ici, face à face avec l'axiome de départ, quelque chose demeure secret, non par souci de se cacher, mais parce que l'axiome est l'atome du raisonnement, admettons un instant qu'elle soit sans pourquoi.

Pourtant, lorsque le reliquaire accumule les flacons et les étuis, lorsque le désert secret bourgeonne de fleurs réservées ou écloses, le secret commence à se trahir. On se rend compte que les seuls progrès qui vaillent sont ceux qui modifient notre vision du monde – et cela par l'élaboration de nouvelles formes d'intelligibilité. Et pour cela il faut revenir à une conception plus philosophique (voire mathématique) des formes premières d'intelligibilité. Nos expérimentateurs, sempiternels laudateurs du « *hard fact* », se sont-ils jamais demandé ce qu'est un *fait* ?

Faut-il croire – ce qu'insinue l'étymologie – que derrière tout fait, il y a quelqu'un ou quelque chose qui fait ? Et que ce quelqu'un n'est pas réduit à l'expérimentateur lui-même, mais qu'il y a un « sujet » résistant sur lequel le fait nous apprend quelque chose ? Telles sont les questions que notre philosophe devra constamment reposer, insufflant ainsi quelque inquiétude devant le discours volontiers triomphaliste de la communauté scientifique.

Bien sûr la Science n'a nul besoin de ce discours pour continuer. Mais il restera peut-être quelques esprits éclairés pour l'entendre, et en tirer profit.

Ce qui m'a motivé à rédiger ce modeste *fascicule* ? Le courage intellectuel, qui est le refus, dans la pensée, de céder à la peur : le refus de se soumettre à autre chose qu'à la vérité, que rien n'effraie et fût-elle effrayante. La lucidité, qui est le courage du vrai, mais à quoi aucune vérité ne suffit. Mon courage est dans le désir, non dans la raison ; dans l'effort, non dans la dictée. Il s'agit toujours de persévérer dans son être (c'est ce qu'**Eluard** appellera « le dur désir de durer »), et tout courage est de volonté.

Je pense à cette phrase d'**Alain Connes** : « *Il faut laisser parler l'intuition, présente en nous mais que la plupart des gens refoulent* ». Surtout, il ne faut jamais accepter ni autorité ni dogme, « la *seule autorité en maths, c'est soi-même* ».

Théo Héikay-Universitaire/pdf