L'oreille *écoute* clairement et l'œil *regarde* de façon *pénétrante* la conjecture dite de Pringsheim

Si je consacre à cette recherche un temps considérable, c'est que j'ai énormément des choses à dires. À cet univers étendu et varié de concepts et de préoccupations,_ qui va des séries entières aux variables complexes,_ j'essaierais d'apporter des ressources intellectuelles que je qualifierais de *cosmopolites* si je ne craignais de me perdre dans mille détours et ramifications hors de propos pour expliquer ce que j'entends par là ; pourtant, perché sur les épaules des Mathématiciens qui m'inspirent, je donne l'impression, entre démonstrations et récits, de savoir où je vais et peut-être le secret de ma singularité est-il aussi simple que ça. Comme un **Lebesgue** ou comme un **Schwartz**, le mathématicien allemand **Pringsheim** est entré dans mon panthéon personnel.

Lecteur grammairien, de l'*Analyse Mathématique*, je suis allé à la rencontre de la structure nerveuse et osseuse du Théorème associé à son nom, j'ai dialogué avec les relations spatiales et chromatiques de sa toile, les dimensions de sa nef. J'ai donc appris à entendre les tonalités et hauteurs de son qui constituent la grammaire de sa musique. Et je suis arrivé à la conclusion qu'un scientifique découvre ou invente dans les lacunes d'une méthode, les ratés de l'expérience, l'incomplétude des résultats ou la bascule d'une théorie.

Au moins autant que tout art de la civilisation, un grand Théorème, est un acte de mise en relation entre les vivants et les morts. Les formulations simples et les définitions claires et précises qui expriment aujourd'hui son sens doivent toujours être considérées comme le produit d'un raccourci historique, et chaque affirmation comme renfermant les restes de ces longues années de tâtonnement anxieux et de recherches vaines menées par les hommes qui ignoraient comment tout cela finirait.

Étudiant seul dans la lueur jaune d'une unique lampe de bureau, chaque lecteur recrée dans sa propre expérience des siècles de travail. Dans cet article, je suis comme **Newton** et **Leibniz**, **Euler** et **Dedekind**, **Riemann** et **Lebesgue**, **Cauchy** et **Weierstrass, Wiles** et **Connes** … je m'adresse au premier venu pour lui dire avec une lueur de folie dans le regard : le théorème dit de **Pringsheim** comportait une erreur, et j'essaierais de le prouver…

Je me permets avant de poursuivre, d'ouvrir une parenthèse. À la fin de chaque mois, je rêve qu'un imprimeur fasse une petite coquille en imprimant ce que j'ai écrit et me permette ainsi de perdurer. Je pense souvent au « dur désir de durer » d'**Eluard** et ce « dur désir de durer » peut être donné par un imprimeur. Chacun d'entre nous a sa chance. On aimerait croire que l'on sera lu un peu plus tard, que quelqu'un va, de temps en temps, feuiller un polycopié dans un rayon d'une bibliothèque universitaire et prendre ce polycopié en main afin que l'étincelle jaillisse. Ce serait un beau rêve, on a le droit d'y croire, mais de temps à autre, il se réalise. Parenthèse fermée.

Auriez-vous l'audace de parler du monde si vous ne l'aviez jamais parcouru ? De même que les choses diffèrent immensément de ce qu'en disent les discours, rapports, de même les Mathématiques n'ont rien à voir avec ce qu'on en dit quand on ne les pratique pas en grand.
On croit volontiers qu'il n'y a pas de différence entre un discours sur le théorème de Pringsheim et le théorème de Pringsheim, tant qu'on n'a pas essayé. On croit qu'un bon atlas sur le désert tient lieu de vie chez les Touareg du Sahara. L'erreur serait de

reculer devant l'essai. La tentative comporte un risque, de l'aléa, l'inconnu. Faut-il le dire, je n'ai pas peur de la rencontre, dans l'acception qu'a donnée de ce terme **Levinas**, peur de la nudité d'autrui. Preuves que mon cours, je le vis, je le goûte, mais je refuse de copier. À mes yeux, toute bonne lecture acquitte une dette d'amour. Je n'ai pas peur de me déshabiller, de descendre sur le pré, de jouer. Non l'amour ne se prouve point par des mots, ni par des lettres d'amour. Assez parlé, des actes.

Cette fresque que je vais bientôt peindre, que dit-elle ? Et si j'ai déjà posé cette question, souvent dans les mêmes termes, c'est uniquement parce que l'énonciation d'un théorème mathématique suggère ce qu'il ne dit pas et que, comme tout autre objet culturel, il ne prend vie que par l'attention introspective que lui porte son interprète.

Imaginez un instant le paysage des fonctions analytiques *sans* ce théorème ; tout n'est que nuages noirs, pluie de brouillard gris et tourbillonnant. La nuit est emplie de formes étranges : conditions d'holomorphie, séries entières et principes des zéros isolés, formules de Cauchy, développement de Laurent et singularité isolées, principe du maximum et lemme de Schwarz, suites, séries, produits infinis et intégrales à paramètre, fonctions harmonique et résidus, théorème/surfaces de Riemann et fonctions de plusieurs variables; et chaque éclair qui déchire le ciel nocturne semble illuminer une scène changeante et confuse, peuplée de concepts qui ne cessent de se réorganiser en réponse à la pression perceptible mais invisible de divers théorèmes puissants faisant éruption comme des volcans sous la surface de la Terre. À ce sombre paysage sorti tout droit d'un tableau de Bosch, le théorème de Pringsheim des fonctions analytiques apporte une lumière, un rayonnement dû à l'élimination spectaculaire de tout ce qui occupe l'arène conceptuelle, hormis les instruments essentiels, les outils absolument fondamentaux de l'analyse _ ces *fonctions* qui dominent toute la scène, immobiles et songeuses ; et c'est justement grâce à cette évacuation drastique que le théorème de Pringsheim impose l'ordre à l'univers conceptuel.

La relation réciproque entre l'analycité d'une fonction et le fait qu'elle soit indéfiniment dérivable dans le cas réel entraîne une impression d'enfermement, impression dont on peut prendre pleinement conscience en se laissant emporter par la fraîcheur de cette brise qu'est la pensée créatrice. L'acte de démonstration ou de traduction peut être légitimement regardé comme un encodage dont les éléments performatifs sont susceptibles de formalisation et, dans certaines limites, de déchiffrage systématique. Pour ma part, je travaille comme à un absolu, à une œuvre relative et incertaine…. Mais je sais de mieux en mieux que *la seule connaissance qui vaille est celle qui se nourrit d'incertitude et que la seule pensée qui vive est celle qui se maintient à la température de sa propre destruction.*

La question muette : « Est-ce que ma démonstration est aussi rigoureuse comme j'espère qu'elle le soit ? » est donc toujours présente : comme doit être présent son écho : « Ai-je compris le théorème de Pringsheim comme il espérait l'être ? » Cette incertitude partagée qui est au cœur de l'acte d'une communication en fait une aventure commune chaque fois renouvelée. Deux intimes se cherchent avec l'espoir obstiné d'un éblouissement partagé qu'ils savent impossible ou du moins exceptionnel. L'énoncé du théorème de Pringsheim et ses concepts m'invitent à un rendez-vous où je ne rencontrerai que moi-même mais dont je sortirai toujours quelque peu transformé. Parce qu'elle est incertaine, la communication conceptuelle qu'elle soit orale ou écrite exige autant d'obéissance qu'elle propose de liberté interprétative. J'en accepte les devoirs, j'y exerce des droits.

La Conjecture d'Alfred PRINGSHEIM

Introduction _ Regarde : ici, dans le monde enfin réel, la lumière d'une fonction *sonne* différemment.

Définition _ *Soit une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Elle est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière en tout z_0 de Ω.*

Si f est analytique sur Ω, elle est de classe C^{∞}, et on s'entend à ce que réciproquement…. Eh bien non ! Dans le cas réel ça coince.
Soit une fonction de classe C^{∞} de Ω ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors il se peut qu'en x_0 de Ω sa série de Taylor ait un rayon de convergence nul, ou qu'elle ne converge pas vers la fonction.

Donc dans le cas réel : classe C^{∞} n'implique pas analytique.

C'est donc ce jeu d'alternances qui va rythmer dans cet article, le battement du cœur de **la conjecture de Pringsheim** : une condition suffisante d'analycité des fonctions de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Il y a de la composition d'inspiration musicale dans cette conjecture. La construction d'une fonction f de classe C^{∞} dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul n'est pas que visuelle, elle vibre pour l'œil et l'oreille, elle résonne, avant de laisser la place à l'éclaircie, et l'apaisement ... mais l'ombre des fonctions analytiques et les fonctions de classe C^{∞} sont aux aguets. Les fonctions de classe C^{∞} et la lumière des fonctions analytiques se répondent, s'écoutent, s'observent, jouent ensemble, ou se narguent dans le cas réel.

L'autre but de cet article est de montrer que le savoir a deux façons : le souci de vérification et les lourdeurs que demandent l'assurance, mais aussi le risque pris, la nouveauté produite, la multiplicité des objets, bref l'inventivité. Car A. Pringsheim énonce sa conjecture en 1893, mais publie une preuve qui se révèle être fausse.

"f est-elle analytique ? f est-elle de classe C^∞ ? Et si ces deux questions n'en formaient qu'une ? " Pour y répondre, je convoque des séries de Taylor, le Théorème de Baire, le raisonnement par l'absurde, le principe de prolongement analytique, le Théorème de Fubini pour les séries, concepts et théorie issus de l'analyse à travers les siècles. Taylor côtoie librement Lagrange ; un nombre dénombrable de fermés se joint au théorème de Baire, le développement en série entière et les connexes ne sont pas oubliés …

Tous, ensemble au Paradis du concept. Les séries de Taylor-Lagrange ou le Théorème de Baire, le développement en série entière ou le principe du prolongement analytique, chaque concept éclaire un chemin d'autant plus étroit qu'il ne s'ouvre jamais que le temps bref d'une illumination. Quête du sacré (au sens d'admirable) défini sur le mode précis de la recherche fondamentale, cette publication à caractère pédagogique se veut un article d'heures pour temps de détresse, une manière de poser la question ultime : de quelle vérité l'universitaire, bon entraineur d'intelligences – en devenir –, est-il capable ? De quelle bonne nouvelle inattendue est-il porteur ?

Je sais la source dite d'analycité, où j'irai rafraîchir les paupières d'une fonction de classe C^∞, définie sur $\mathbb{R}$

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ n'est, hélas, pas nécessairement développable en série entière au voisinage de tout point (on dit « analytique »). Pire, une fonction de classe C^∞ dont la série de Taylor (*i.e.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} u^n$) converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement analytique non plus.

Remark: *The definition itself explains its own difficulties. It requires such quantifiers and trades on two or three inequalities. Experience indicates that these are difficult devices to retain in memory.*
Could not the effect of the definition be achieved by trading on a little mathematical body English and a good many solid examples? Perhaps.

Remarque : La définition explique elle-même sa difficulté : elle nécessite quelques quantificateurs et prend appui sur quelques inégalités. L'expérience montre que ce sont des choses difficiles à retenir.
N'obtiendrait-on pas le même résultat avec un brin de gestuelle mathématique et un bon nombre d'exemples solides ? Peut-être.

Voyons cela sur deux exemples.

Like a difficult work of the graphic arts in which what seems simple conceals a world of vibrant depth, the examples to which I am attending yield their riches slowly.

Δ !! _ Comme une œuvre graphique dont la simplicité apparente dissimule tout un monde d'une profondeur vibrante, les exemples sur lesquels je me penche produisent leurs richesses lentement.

Exemple 1 _ On définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin 2^n x}{n^n}$ pour $n \geq 1$, et on considère la série des f_n.

On a $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$, pour $n \geq 2$, il y a convergence normale vers une fonction somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{n^n}$ qui est de classe C^∞ car, $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$f^{(p)}{}_n(x) = \dfrac{2^{np} \sin\left(2^n x + p\,\dfrac{\pi}{2}\right)}{n^n}$ et $\|f^{(p)}{}_n\|_\infty = \left(\dfrac{2^p}{n}\right)^n$ or, (p fixé) il existe n_0 tel que $\dfrac{2^p}{n_0} = k < 1$, donc $\forall\, n \geq n_0$, $\|f^{(p)}{}_n\|_\infty \leq k^n$ terme général d'une série convergente, il y a convergence normale de chaque série des dérivées. Par des applications successives du théorème de dérivation d'une série, on justifie donc que f est de classe C^∞. Considérons sa série de Taylor en 0 : c'est la série entière de terme général $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p\,!}\, x^p$.

Or $$f^{(p)}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{np} \sin\left(p\,\frac{\pi}{2}\right)}{n^n} = \sin\left(p\,\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{np}}{n^n}$$

On a donc $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n(2p+1)}}{n^n}$, donc le terme général de la série de Taylor devient

$$w_p = \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}\, x^{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n(2p+1)}}{n^n}\right) x^{2p+1}.$$

Eh bien, pour $x \neq 0$, w_p ne tend pas vers 0, car

$$\left|w_p\right| \geq \frac{\left|x\right|^{2p+1}\ 2^{(2p+1)(2p+1)}}{(2p+1)^{2p+1}(2p+1)^{2p+1}} = \left(\frac{\left|x\right|2^{2p+1}}{(2p+1)^2}\right)^{2p+1}$$

et

$$\operatorname{Log}\left(\frac{\left|x\right|2^{2p+1}}{(2p+1)^2}\right) = (2p+1)\left[\operatorname{Log} 2 + \frac{\operatorname{Log}\left|x\right|}{2p+1} - \frac{2\operatorname{Log}(2p+1)}{2p+1}\right]$$ tend vers $+\infty$,

on voit bien que $\lim_{n \to +\infty} \left|w_p\right| = +\infty$.

Je viens donc de construire une fonction f de classe C $^{\infty}$, dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul : elle n'est pas analytique.

Exemple 2 _ On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$. Elle est de classe$]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Ses dérivées de tout ordre à gauche en 0 sont nulles, or on justifie par récurrence, que pour $x > 0$ la dérivée d'ordre n est du type $\frac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-1/x^2}$, avec $a_n \in \mathbb{N}$ et P_n polynôme en x. La présence de e^{-1/x^2} implique donc que f et toutes ses dérivées ont une limite nulle à droite en 0, d'où f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et, $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

La série de Taylor de f en 0 est donc…. La série nulle, de rayon de convergence infini mais de somme différente de f.

These examples are less *perspicuous than their purely vernacular explanation: they do not breathe. They are instead fabulously compact ways of presenting information, and in time their eerie concision comes to appear as a form of beauty.*

Δ !! _ Ces exemples sont *moins* clairs que leur explication purement linguistique: ils ne respirent pas. Mais ils sont une façon fabuleusement compacte de présenter l'information et à terme, leur concision inquiétante en vient à apparaître comme une forme de beauté.

Mais, ces deux exemples montrent aussi que, sur $\mathbb{R}$ la situation n'est pas simple, et qu'il va falloir des conditions supplémentaires à la classe C^∞, pour obtenir f analytique. Par contre (en revanche, disent les puristes !!), dans le cas complexe, c'est beaucoup plus simple.

Question à 1 $ dit-on chez moi. Trouvez un résultat expliquant en partie pourquoi on a eu des ennuis avec le 2e exemple.

La fonction
$$f_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x > 0 \longmapsto exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \\ x \leq 0 \longmapsto 0 \end{cases}$$

de classe C^∞, a une série de Taylor dont tous les coefficients sont nuls en zéro (les dérivées *n-ièmes* sont toutes nulles en 0), mais qui n'est pas nulle à droite de 0.

Remarquons alors qu'en revanche, une fonction f analytique sur $\mathbb{R}$ admet une série de Taylor en tout point de rayon de convergence non nul. Mieux, ce rayon de convergence est minoré uniformément sur tout intervalle borné.

En effet, si $I =]a, b[$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ lequel f est analytique, on dispose pour chaque point $x \in \overline{I}$ d'un intervalle $I_x =]x - \alpha_x , x + \alpha_x[$ tel que, $\forall u \in]-\alpha_x , \alpha_x[$,

$$f(x+u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} u^n .$$

$\overline{I}$ étant compact, on peut extraire du recouvrement $(I_x)_{x \in \overline{I}}$ un sous-recouvrement fini

$$( ]x_0 - \alpha_{x_0} , x_0 + \alpha_{x_0}[,]x_1 - \alpha_{x_1} , x_1 + \alpha_{x_1}[\dots]x_{k+1} - \alpha_{x_{k+1}} , x_{k+1} + \alpha_{x_{k+1}}[ )$$

avec $x_0 = a$ et $x_{k+1} = b$.

Posons alors $\eta = \frac{1}{4} \min_{i \in \{0,\dots,k\}} [\,(x_i + \alpha_{x_i}) - (x_{i+1} - \alpha_{x_{i+1}})\,]$

Pour tout $x \in I$, la série de Taylor de f au point x a un rayon de convergence supérieur à η. Pour le démontrer, observons que la définition de η permet de trouver $y \in (x_0, \dots, x_{k+1})$ tel que $]x - \eta\,,\ x + \eta[\ \subset\ ]y - \alpha_y\,,\ y + \alpha_y[$.

On pose $v = x - y$ et l'on considère $u \in\ ]-\eta,\ \eta[$. Alors, par définition de I_y, on a :

$$f(x+u) = f(y+v+u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(v+u)^n$$

En utilisant la formule du binôme,

$$f(x+u+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \sum_{i=0}^{n} C^i_n\, v^{n-i} u^i$$

$$f(x+u+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C^i_n \frac{f^{(n)}(y)}{n!} v^{n-i} u^i\,.$$

Maintenant, η a été choisi de tel sorte que $(y + |v| + |u|) \in\ ]y - \alpha_y,\ y + \alpha_y[$. On peut ainsi écrire, toujours par définition de

$$I_y : f(y + |v| + |u|) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C^i_n \frac{f^{(n)}(y)}{n!} |v|^{n-i} |u|^i$$

avec la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C^i_n \left|\frac{f^{(n)}(y)}{n!}\right| |v|^{n-i} |u|^i$$

qui converge. Le théorème de *Fubini* pour les séries permet alors d'inverser les deux sommes et d'écrire :

$$f(x+u) = f(y+v+u) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C^{i}_{n}\frac{f^{(n)}(y)}{n\,!}v^{n-i}\right)u^{i} \qquad \textbf{(1)}$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en tout point $x \in I$ est au moins égal à η.

Il apparaît alors clairement sur l'exemple de la fonction f_0 que c'est le caractère non minoré de ce rayon de convergence (tendant vers zéro lorsque l'on se rapproche du point $x = 0$) qui crée l'impossibilité de développement de f_0 au voisinage de $x = 0$ et donc la non-analycité de f_0. Le théorème de *Pringsheim* que je revisite énonce la réciproque de la propriété vue ci-dessus et établit ainsi une condition suffisante d'analyticité de f.

Si l'on veut une C.N.S., il est souhaitable d'utiliser le théorème suivant :

Théorème _ *Une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est analytique sur I si et seulement si, $\forall x_0 \in I$, $\exists V$ voisinage de x_0, $V \subset I$, et deux nombres > 0, M et t, tels que* $\forall x \in V$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{1}{p!}f^{(p)}(x)\right| \leq Mt^{p}$.

<u>Si la condition est réalisée</u>, par Taylor Lagrange d'ordre n entre x_0 et $x \in V$, le reste d'ordre n prend la forme :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta)$$

ce qui se majore en module par $M \left|t(x-x_0)\right|^{n+1}$, et ce qui prouve que pour $\left|x-x_0\right| < \frac{1}{t}$, la série de Taylor de f converge effectivement vers f.

<u>*La condition est nécessaire*</u>, car si f est analytique sur I, elle est développable en série entière en $x_0 \in$ I, et si on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, pour $x \in$ I tel que $\left|x-x_0\right| < R$, je vous laisse vérifier que pour x_1 de I vérifiant $\left|x_1 - x_0\right| < R$, et pour x tel que $\left|x-x_1\right| = r - \left|x_1 - x_0\right|$, avec $r < R$ en posant encore

$$u_{p,\,q} = \frac{q!}{p!(q-p)!} a_q (x_1 - x_0)^{q-p}(x-x_1)^p$$

si $q \geq p$ et 0 sinon, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left|u_{p,\,q}\right| = \left|a_q\right| r^q \text{ et } \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\left|u_{p,\,q}\right|\right) = \sum_{q=0}^{\infty}\left|a_q\right| r^q = M\,;$$

puis

$$\left|\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right| = \left|\frac{f^{(p)}(x_1)}{p!}(x-x_1)^p\right| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \left|u_{p,q}\right|$$

$$\leq \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left|u_{p,q}\right|\right) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\left|u_{p,q}\right|\right) = \mathrm{M}$$

d'où

$$\left|\frac{f^{(p)}(x_1)}{p!}\right| \leq \frac{\mathrm{M}}{\left(r-\left|x_1-x_0\right|\right)^p}$$

puisque $\left|x-x_1\right| = r - \left|x_1 - x_0\right|$.

Mais r' tel que $\left|x_1 - x_0\right| < r' < r < \mathrm{R}$, on a $r - \left|x_1 - x_0\right| \geq r - r'$, et pour tout x_1 vérifiant $\left|x_1 - x_0\right| < r'$, ($r'$ assez petit pour que $x_1 \in \mathrm{I}$),

on a finalement $\dfrac{1}{p!}\left|f^{(p)}(x_1)\right| \leq \dfrac{\mathrm{M}}{(r-r')^p} = \mathrm{M}\,t^{\,p}$ avec $t = \dfrac{1}{r-r'}$, d'où la condition cherchée.

Avant d'aller plus loin, une détente s'impose. Je respire, je m'étire, je pense, je suis qui je suis, je serai qui je serai, je peux parler, chanter, murmurer (*les phrases sans aucun rapport*), et même dire pourquoi il me paraît indispensable de *ré-écrire* et faire parler les concepts que nous mettons en scène.

Δ !! _ La vérité mathématique se réduit à la circulation, exactement à ce qui est placé en lumière, mis en scène, en image et musique, devant nos yeux émerveillés.

Here on the page is the payoff to that promise _ the mathematics would make available instruments sufficiently flexible to be in their overall respects alike and in their particulars quite different _ the metaphysics emerging from the mathematics, and yielding a wonderful sense of what precisely it might mean to speak of unity in diversity and diversity in unity.

Δ !! _ Et là sur la page se trouve le résultat de cette promesse _ les Mathématiques fourniraient des outils suffisamment souples pour être similaires dans leurs grandes lignes mais différents dans leurs détails _ qui fait émerger la métaphysique des Mathématiques et donne une idée merveilleuse de ce que l'on entend précisément quand on parle d'unité dans la diversité et de diversité dans l'unité.

Δ !! _ Dans son modeste courroux, Cézanne atteste l'incapacité de son œil à pénétrer en profondeur le paysage qui s'étend devant lui. Les Mathématiques pures connaissent l'insoluble sans être bien sûres de la source de cette insolubilité.

Cézanne testifies in modest anger to the inability of his eye to penetrate in depth the landscape before him. Pure mathematics knows of the insoluble though there is no assured grasp of the source of such insolubility.

Écrire est du moins, pour moi, une joie constante

Ré-écrire, c'est mon combat quotidien contre le néant, pour ne pas voir très probablement la disparition d'une certaine *auctoritas*, mot latin signifiant la garantie de la chose écrite. Je crois toujours profondément à la parole grecque classique qui nous dit que la mémoire est la mère de toutes les Muses. Ce qu'on ne peut pas traduire, on ne le connaîtra jamais profondément, on ne l'aimera jamais assez.

Ré-écrire aussi pour que des collectivités de sensibilités, bâties sur l'éphémère, ne remplacent pas l'ancienne autorité des savoirs. Ce qu'Eluard a appelé "le dur désir de durer", qui a été la clé de la vie des grands mathématiciens, ne disparaisse pas par la même occasion, alors que l'on assiste au triomphe de l'anonymat.

Ré-écrire encore pour que des valeurs qui existaient depuis les Grecs ne puissent pas s'éteindre, ou plutôt s'inverser. Notre devoir n'est-il pas d'identifier ce qui dans un étudiant peut et veut se réveiller et d'aplanir tous les obstacles financiers, sociaux qui peuvent l'en empêcher ? Un grand système éducatif ne donne-t-il pas leur chance aux esprits curieux ? Si c'est oui deux fois, alors arrêtons de niveler !

Ré-écrire enfin pour des étudiants époustouflants d'intelligence, d'enthousiasme, de puissance créatrice, mais surtout pour tous les esprits curieux. Et pour des jeunes qui ont un certain dégoût face à l'omnipotence du marché.

Il est temps de s'attaquer à cette ultime partie. Montrer pourquoi l'erreur commise par Pringsheim était là, mais voilée, assourdie. Elle va bientôt jaillir jour et nuit, à travers chaque note éparse. Le théorème de Pringsheim pourra alors chanter, puisqu'il est vibration.

2. Le théorème de Pringsheim revisité par Théo Héikay

Soit $r \in \mathbb{R}^*_+$; on considère : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ une application de classe C^∞ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Taylor de f au point x (*i.e.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} u^n$) aie un rayon de convergence supérieur à r. Alors f est analytique.

"Imagination is more important than knowledge." Nous dit Enstein.

I like to imagine that as I explain this modern version of his theorem to Pringsheim himself, a slowly dawning smile of sympathetic appreciation crosses his tough, creased face.

J'aime à imaginer que, pendant que j'explique à Pringsheim cette version moderne de son théorème, un bienveillant sourire d'appréciation naît lentement sur ses traits rudes et chiffonnés.

Several lines of thought and desire are about to meet, but before they do it is worth remembering how often liabilities may be converted into assets.

Plusieurs lignes de pensée et d'envie sont sur le point de se rejoindre mais avant qu'elles le fassent il est bon de rappeler qu'un handicap peut bien souvent devenir un atout.

Δ !! _ Je définirai la lecture d'un théorème comme la *maximalisation de l'infini conceptuel quand aux moyens formels de sa traduction*. Ici, le théorème de Pringsheim, dont la description des composantes formelles peut être limitée, exige et produit une réponse uni-verselle.

3. *Errare humanum est* : « L'homme se trompe parce qu'il est humain, il apprend parce qu'il se trompe » Je fais l'éloge de l'erreur, l'éloge de l'obstacle et de la prise du risque.

Le théorème précédent a été énoncé par **A. Pringsheim** en **1893**. Il en a publié la preuve suivante qui s'est révélée fausse :

Pour $s < r$ et $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} s^n$ est convergente.

Donc $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} s^n = 0.$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on écrit la formule de *Taylor-Lagrange* à l'ordre N pour f entre x et y :

$$f(y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}(y-x)^n + \frac{f^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)\,!}(y-x)^{N+1} \qquad (2)$$

où θ est compris entre x et y. On a alors, pour $y \in \left]x-s\,,\,x+s\right[$,

$$\left| f^{(N+1)}(\theta)\frac{(y-x)^{N+1}}{(N+1)\,!} \right| \leq \left| f^{(N+1)}(\theta) \right| \frac{s^{N+1}}{(N+1)\,!}$$

qui tend vers zéro lorsque $N \longrightarrow \infty$ d'après ce que l'on a vu ci-dessus. Le reste de *Taylor-Lagrange* tendant vers zéro, f est développable en série entière au voisinage de x.

Mais où est donc l'erreur ? Il convient, je crois, de ciseler sa réponse avec le plus extrême soin. Et il faut procéder de manière indirecte, par de petits coups successifs. Mais les enjeux sont capitaux. Le paragraphe suivant nous éclairera sur cette erreur et son origine.

4. Lemmes préliminaires

Dans la preuve précédente, l'imprécision qui crée l'erreur se trouve au niveau de θ. La formule de *Taylor-Lagrange* permet en effet de trouver, pour chaque N, un réel θ qui dépend de N, appelons le θ_N , tel que l'on ait l'équation (2).

On ne peut alors rien dire sur l'éventuelle limite de $\left|f^{N+1}(\theta_N)\right| \dfrac{s^{N+1}}{(N+1)\,!}$,

quand $N \longrightarrow \infty$. En fait, si l'on disposait d'une majoration uniforme de cette dernière quantité sur un intervalle contenant x, on pourrait conclure. Précisons l'argument ci-dessus en démontrant le lemme suivant :

Lemme fondamental (condition suffisante d'analycité)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{∞}. On suppose qu'il existe $\rho > 0$

et $C \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \dfrac{Cn\,!}{\rho^n}$

Alors f est analytique sur I.

Démonstration.

La condition sur f est une majoration uniforme sur I des coefficients $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n\,!}$ de la série de Taylor par une suite géométrique. La démonstration repose sur la formule de *Taylor-Lagrange :*

Soit $x \in I$; pour $y \in I$,

$$f(y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}(y-x)^{n} + \frac{f^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)\,!}(y-x)^{N+1}$$

où θ est compris entre x et y.

Si $|y-x| \leq \frac{\rho}{2}$,

$$\left| f(y) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}(y-x)^{n} \right| \leq \left| f^{(N+1)}(\theta) \right| \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \leq C.\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in I,\ |y-x| \leq \frac{\rho}{2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left| f(y) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}(y-x)^{n} \right| = 0$$

f est donc développable en série entière au voisinage de x.

Cela vaut pour tout $x \in I$: f est bien analytique sur I.

On voit ici ce qui manque à la preuve de **Pringsheim** pour fonctionner : l'uniformité de la majoration. On peut obtenir une telle uniformité sur un ouvert dense en appliquant le théorème de *Baire*. Mon but est donc de donner une preuve juste de ce théorème.

Δ !! _ Si mon argumentation se tient, le fait d'avoir recours au théorème de Baire, exige un examen attentif.

Théorème de Baire

Soit E un espace complet, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés dans E *vérifiant* $\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$.

Alors l'ouvert $\cup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n$ est dense dans E.

Démonstration.

The proof is easy, dramatic evidence that in mathematics what is important is not necessarily what is hard.

La démonstration est facile et elle prouve avec éclat que ce qui est important en Mathématiques n'est pas forcément difficile (*rires…*).

Notons G le fermé $E \setminus \left(\cup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n\right)$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \overset{\circ}{\overline{G \cap F_n}} \subset G \cap \overset{\circ}{F}_n = \phi$$

Le théorème « classique » de Baire (démontré dans tout bon ouvrage d'analyse) nous donne alors le fait que la réunion des $(G \cap F_n)$ est d'intérieur vide.

Or

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} (G \cap F_n) = G \cap [\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n] = G \cap E = G.$$

Ainsi, G est d'intérieur vide : son complémentaire est un ouvert dense, ce qui achève la démonstration. Quelques mots en guise de viatique, pour vous préparer à entrer dans le vrai théâtre du soir ? Eh bien, d'accord, les voici :

The Pringsheim's theorem makes a claim about an entire class of functions, and so a claim about the processes that they represent, and so ultimately a claim about a determinate aspect of the world. It happens often in mathematics that as the corollaries and consequences of a great theorem are spun out, some part of the theorem's meaning mutates as its verbal embodiment changes. So it is with the Pringsheim's theorem.

Le théorème de Pringsheim porte sur une classe entière de fonctions, donc sur les processus qu'elles représentent, donc en définitive sur un aspect bien défini du monde. Il arrive souvent en mathématiques que lorsqu'on récite les corollaires et les conséquences d'un grand théorème, une partie de celui-ci mute en même temps que change son incarnation verbale. C'est le cas du théorème de Pringsheim.

La réunion des diverses hypothèses et de leurs conséquences débouche sur l'énonciation plus formelle du théorème Pringsheim. Je me chargerai des détails de la démonstration moi-même.

5_ Bringing the various contingencies and their conclusions together yields a more formal statement of Pringsheim's theorem. I will handle the details myself.

The proof of the pringsheim's theorem is child's play (rires…). The full force of the theorem resides in what it says and not how it is deduced; the argument requires that only a few facts be kept resident.

Démontrer le théorème de Pringsheim des fonctions analytiques est un jeu d'enfant (*rires…*). La pleine force de ce théorème réside dans ce qu'il dit et non dans la manière dont on le déduit ; le raisonnement demande uniquement de ne pas perdre de vue certains faits.

The proof of the pringsheim theorem of Complex Variables is child's play (rires…). The full force of the theorem resides in what it says and not in how it is deduced; the argument requires that only a few facts be kept resident.

Le metteur en scène commence par une supposition simple et directe qui invite à une suspension de l'incrédulité. _ The *theater master of the theorem begins with a simple, a straightforward, assumption, one inviting a suspension of disbelief.*

Soit $x \in \mathbb{R}$; par hypothèse, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} u^n$ a un rayon de convergence $R \geq r$.

En particulier,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} \left(\frac{r}{2}\right)^n = 0 \text{ et donc } \exists\, C \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{Cn\,!}{\left(\frac{r}{2}\right)^n}$$

Le principal problème, que j'ai évoqué plus haut, vient du caractère non uniforme de la majoration (C dépend de x). L'idée est de se ramener à des fermés sur lesquels la majoration est uniforme. Pour pouvoir appliquer le théorème de *Baire*, on a besoin d'un nombre dénombrable de fermés ; c'est pour cela que l'on prend $C \in \mathbb{N}$.

Pour $C \in \mathbb{N}$, soit $$F_C = \left[x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{Cn\,!}{\left(\frac{r}{2}\right)^n} \right]$$

f est de classe C^{∞} donc $f^{(n)}$ est continue et F_C est fermé.

De plus, on vient de voir que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, C \in \mathbb{N},\ x \in F_C$. D'où $\cup_{C \in \mathbb{N}} F_C = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ étant un espace métrique complet, $(F_C)_{C \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de fermés tels que $\cup_{C \in \mathbb{N}} F_C = \mathbb{R}$. La version forte du théorème de Baire démontrée au paragraphe précédent nous assure que $\cup_{C \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_C$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Notons $\Omega = \cup_{C \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_C$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et si $x \in \Omega$, $\exists\, C \in \mathbb{N}$, $x \in \overset{\circ}{F}_C$; donc il existe un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, noté I, tel que $x \in I$ et $I \subset F_C$.

Alors,

$$\forall y \in I, \left|f^{(n)}(y)\right| \leq \frac{Cn\,!}{\left(\frac{r}{2}\right)^n}.$$

Le lemme fondamental nous assure que f est analytique sur I. Ainsi, f est analytique sur Ω.

Notons alors Ω_A l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ en lesquels f est analytique.

On raisonne par l'absurde (*reductio ad absurdum*) en supposant $\Omega_A \neq \mathbb{R}$.

Appelons F le complémentaire de Ω_A dans $\mathbb{R}$.

Comme Ω_A contient un ouvert dense, F est un fermé d'intérieur vide. Pour aboutir à une contradiction, il suffit de montrer que f est également analytique sur F. On va, pour cela, essayer de majorer uniformément les $\frac{f^{(n)}(y)}{n\,!}\left(\frac{r}{2}\right)^n$ et se servir ensuite du lemme fondamental.

Afin de réussir cette majoration uniforme, on reprend les fermés F_C. *A priori*, on aimerait disposer d'un ensemble « groupé » de points de $(F \cap F_C)$. Celui-ci est donné par une deuxième application du théorème de *Baire :*

F est fermé dans $\mathbb{R}$ donc complet.

De plus, $\cup_{C \in \mathbb{N}} F_C = \mathbb{R}$ donne $\cup_{C \in \mathbb{N}} (F \cap F_C) = F$, union de fermés.

Le théorème de *Baire* nous dit alors qu'il existe $C \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{\overline{F \cap F_C}} \neq \phi$, l'intérieur étant pris dans F. Ainsi, il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que :

$$F \cap I \neq \phi,\ F \cap I \subset F \cap F_C \text{ et donc } F \cap I \subset F_C .$$

$I \setminus F$ est ouvert dans I ; on le décompose en composantes connexes dans I :

$$I \setminus F = \cup_{\alpha \in \mathbb{N}}]u_\alpha , v_\alpha[$$

avec u_α et v_α qui sont dans F ou qui sont les extrémités de I.

On tente alors de majorer uniformément les $\dfrac{f^{(n)}(y)}{n\,!}\left(\dfrac{r}{2}\right)^n$ sur $I \setminus F$ et d'étendre la majoration à I en utilisant la continuité des dérivées $n^{\text{ièmes}}$.

Prenons une composante connexe $]u , v[$ avec $u \in F \cap I$. Quitte à restreindre I (et alors v n'appartient plus forcément à F, ce qui n'est pas gênant pour la suite de la démonstration), on peut supposer que $l(I) \leq \dfrac{r}{6}$ où $l(I)$ désigne la longueur de I.

On dispose ainsi de $u \in F \cap I$ tel que sur $]u, u + \frac{r}{6}[$, on ne rencontre aucun point de F.

Notons que l'on ne sait rien de ce qui se passe à gauche de u (on peut avoir une accumulation, comme dans l'ensemble de *Cantor*). On aimerait montrer dans un premier temps que f est développable en série entière à droite du point u, c'est-à-dire que $f = S_u$ sur $]u, v[$ où l'on note, S_u la série de Taylor de f en u.

Soit $w = \dfrac{u+v}{2}$ et S_w la série de Taylor de f en w.

Comme $]u, v[\subset \Omega_A$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $f = S_w$ sur $]w - \eta, w + \eta[$.

Or $l(I) \leq \dfrac{r}{6}$ donc S_w converge sur I. D'après la démonstration effectuée au paragraphe introductif (*cf.* (1)), S_w est analytique sur $]u, v[$.

Je vais montrer que $f = S_w$ sur $]u, v[$.

J'introduis

$$H = \{x \in \,]u, v[\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ f^{(n)}(u) = S_w{}^{(n)}(u)\ \}$$

D'après ce qui précède, H contient un petit intervalle ouvert et est donc non vide.

f et S_w étant des fonctions de classe C^{∞}, F est fermé dans I. Maintenant, si $x \in I$, vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = S_w{}^{(n)}(x) = a_n \in \mathbb{C}$, on développe f et S_w au voisinage de x :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall z \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[,\ f(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n\,!} z^n$$

$$S_w(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n\,!} z^n$$

Alors,

$$\forall z \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \forall p \in \mathbb{N},\ f^{(p)}(x+z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{(n-p)\,!} z^{\,n-p}$$

$$S^{(p)}{}_{w}\,(x+z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{(n-p)\,!} z^{\,n-p}$$

ce qui prouve que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \cap I \subset H$. H est donc ouvert dans I. I est connexe (intervalle de $\mathbb{R}$) donc $H = I$.

Ainsi, $f = S_w$ sur $]u, v[$.

Ayant remarqué que

$$\forall\ n \in N,\ S_u{}^{(n)}(u) \ = f^{(n)}(u) = S_w{}^{(n)}(u)$$

on en déduit que $S_u = S_w$ sur I, puis, comme $f = S_w$ sur $]u, v[$.

_ *Is everyone with me ?* _ *Tout le monde suit ?* I have no idea why I ask: *no one* is with me. _ Allez savoir pourquoi je pose cette question. *Personne* ne suit.

A tomblike silence envelops the room. "*Can anyone* specify this sum?

Un silence de mort enveloppe la pièce. « *Quelqu'un* peut-il spécifier cette somme ?

Il n'a pas échappé à votre sagacité que j'ai appliqué, en le démontrant, le principe du *prolongement analytique :* si deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe coïncident sur un petit ouvert, elles coïncident sur tout l'ouvert de départ.

I pause to survey the effect this somewhat florid speech i shaving on my class.

Je fais une pause pour observer l'effet de ce discours quelque peu fleuri sur ma classe.

Maintenant,

$$\forall x \in \,]u, v[, \ \forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(x) = S_u^{(p)}(x)$$

ce qui va nous fournir la majoration voulue :

$$f^{(p)}(x) = S_u^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} f^{(n)}(u) \frac{(x-u)^{n-p}}{(n-p)!}$$

Or, $u \in F_C$ (car $I \cap F_C \subset F_C$ par construction). Donc:

$$\left| S_u^{(p)}(x) \right| \leq \sum_{n=p}^{\infty} \frac{Cn!}{\left(\frac{r}{2}\right)^n} \frac{(x-u)^{n-p}}{(n-p)!}$$

$$\left| S_u^{(p)}(x) \right| \leq \sum_{n=p}^{\infty} \frac{Cn!}{\left(\frac{r}{2}\right)^n} \frac{(x-u)^{n-p}}{(n-p)!} \leq \sum_{n=p}^{\infty} \frac{Cn!}{(n-p)!} \frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n-p}}{\left(\frac{r}{2}\right)^n}$$

$$\left| S_u^{(p)}(x) \right| \leq \frac{C}{\left(\frac{r}{2}\right)^p} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-p}$$

On poursuit avec $\dfrac{n!}{(n-p)!} = p!C_n^p$

$$\left|S_u{}^{(p)}(x)\right| \leq \frac{C}{\left(\frac{r}{2}\right)^p} p\,! \sum_{n=p}^{\infty} C^p{}_n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-p} \leq \frac{C}{\left(\frac{r}{2}\right)^p} p\,! \sum_{l=0}^{\infty} C^{l+1}{}_{l+p+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{l}$$

En dérivant p fois formellement l'égalité $\sum y^s = \frac{1}{1-y}$, on obtient :

$\sum C^p{}_{s+p}\, y^s = \frac{1}{(1-y)^{p+1}}$. Ce qui permet d'écrire :

$$\left|S_u{}^{(p)}(x)\right| \leq \frac{C}{\left(\frac{r}{2}\right)^p} p\,! \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{p+1}}$$

$$\left|S_u{}^{(p)}(x)\right| \leq \frac{C}{\left(\frac{r}{2}\right)^p} p\,! \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{p+1}} \leq \frac{C}{\left(\frac{r}{2}\right)^p} p\,! \left(\frac{3}{2}\right)^{p+1} \leq \frac{\frac{3}{2} Cp\,!}{\left(\frac{r}{3}\right)^p}$$

Ainsi, sur $]u, v[$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $$\left|\frac{f^{(p)}(x)}{p!}\left(\frac{r}{3}\right)^p\right| \leq C^l = \frac{3}{2} C.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la majoration est la même sur $]\, u_{\alpha}, v_{\alpha}[$.

On en déduit, par continuité des dérivées p - *ièmes,* que la majoration vaut sur $\overline{\cup_{\alpha \in \mathbb{N}}\,]\, u_{\alpha}, v_{\alpha}[} = I$; le lemme fondamental donne alors l'analycité de f sur I. D'où la contradiction.

C'est cela qu'il nous faut comprendre tout d'abord. Car les concepts mathématiques, au souffle du matin, se font rêves. Ils tombent comme l'erreur sur notre cœur, s'il n'est personne pour scruter leur nature et les comprendre.

Remark: *The argument just given proceeds by remorselessly flogging an assumption toward a contradiction _* reduction ad absurdum *as it is known cheerfully in the trade, especially by those doing the flogging. This particular* absurdum *evokes something like a feeling of fretfulness…*

Remarque: Le raisonnement que je viens d'exposer consiste à flageller impitoyablement une supposition pour l'amener à la contradiction _ *reductio ad absurdum*, comme le procédé est joyeusement appelé dans le métier, surtout par ceux qui flagellent. Cet *absurdum* particulier suscite comme un sentiment d'énervement…

Δ !! _ Chaque unité formelle du Théorème de Pringsheim, sa structure métrique, le respect de sa grammaire, les conventions conceptuelles qui le rattachent à d'autres théorèmes d'un même contexte historique ou d'une même famille, sont chargés d'un potentiel conceptuel d'innovation qui ne peut être épuisé.
La multiplicité de sens possibles est le produit exponentiel de tous les mondes possibles du sens, tels qu'ils sont construits, imaginés, mis à l'épreuve, habités, dans l'interaction de deux libertés : celle du théorème, en mouvement dans le temps, et celle du récepteur. Les énergies intériorisées de communication et de suggestion réciproques, les « sauts quantiques » qui se produisent dans cette rencontre, dépassent entièrement toute analyse chiffrée, sans parler de prédictibilité.

Le signifié est, comme l'enseigne Blake, toujours « en excès » par rapport au signifié. Si nous voulons connaître la grammaire d'un théorème, qui est la fibre même de la musique de son sens, nous devons connaître, nous devons être réceptifs à la poésie de la grammaire …

A = U D V

De l'information à la pédagogie

J'essaie d'expliquer à présent que, dans le cas complexe, il n'y a pas de condition aussi pénible, en m'appuyant sur un résultat qui montrera que f holomorphe de dérivée continue est analytique ! On est bien loin des difficultés de l'analycité dans le cas réel.

Théorème _ *Soit f holomorphe, de dérivée continue sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$, D un disque de bord orienté γ, (sens direct) contenu dans Ω et $a \in$ l'intérieur de D, on a* $f(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$

On entoure a d'un disque de rayon ε tel que $D_\varepsilon \subset$ à l'intérieur du disque D. Soit g définie sur Ω par $g(a) = f'(a)$ et $g(z) = \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ si $z \in \Omega \setminus \{a\}$ et de dérivée continue sur $\Omega \setminus \{a\}$.

Le théorème suivant : _ *Si g est holomorphe sur $\Omega\setminus\{a\}$ g' étant continue sur $\Omega\setminus\{a\}$, pour tout disque D tel que $a \in$* l'intérieur de $D \subset D \subset \Omega$, alors on a $\int_{\partial D} g(z)dz = 0$.

s'applique et donne $\int_\gamma g(z)dz = 0$, soit $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}dz$ vu la définition de $g(z)$ sur γ. Mais sur le domaine $\overline{D}$ formé de D privé du disque D_ε de centre a et de rayon ε, la fonction $z \longmapsto \dfrac{f(a)}{z-a}$ est holomorphe de dérivée continue, donc le

Théorème suivant : _ *Si f est holomorphe de dérivée continue sur un ouvert Ω* de $\mathbb{C}$, *et si $\overline{D}$ est une partie fermée bornée de Ω, de bord orienté $\partial\overline{D}$*, on a $\int_{\partial\overline{D}} f(z)dz = 0$ _

s'applique, et comme le bord orienté $\partial\,\overline{D}$ est égal à $\gamma - \gamma_{\varepsilon'}$ on a

$$\int_{\gamma} \frac{f(a)}{z-a}dz - \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(a)}{z-a}dz = 0$$

et finalement

$\int_{\gamma} \frac{f(a)}{z-a}dz = \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(a)}{z-a}dz$. Je vais calculer cette dernière intégrale en paramétrant le cercle γ_{ε} par $z = a + \varepsilon e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ d'où :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(a)}{z-a}dz = \int_{0}^{2\pi} \frac{f(a)i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = if(a) \int_{0}^{2\pi} dt$$

et on obtient bien la relation

$$f(a) = f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Corollaire _ Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, et si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable de dérivée continue, elle est analytique sur Ω.

Piece of cake, as we in the business say; but perhaps a piece of cake as only *we in the business say.*

Du gâteau, comme nous le disons dans le métier. Mais peut-être sommes-nous les *seuls* à le dire.

Je pense que vous êtes sensibles à la simplicité de cette condition, surtout si on la compare à la condition d'analycité dans le cas réel.

De plus, ceci entraîne aussi que f dérivable une fois, avec f' continue implique f indéfiniment dérivable ! C'est fabuleux. Qui oserait soutenir que les complexes c'est compliqué ?

Soit a dans Ω, D un disque tel que $a \in$ (l'intérieur du disque D) $\subset D \subset \Omega$, b le centre du disque. On a $f(a) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(z)}{z-a}\,dz$, avec γ bord orienté de D.

Or $\dfrac{1}{z-a} = \dfrac{1}{z-b+b-a}$ et, sur le bord du disque, $z \neq b$, donc

$\dfrac{1}{z-a} = \dfrac{1}{(z-b)\left(1-\dfrac{a-b}{z-b}\right)}$, avec $\left|\dfrac{a-b}{z-b}\right| = \dfrac{|a-b|}{r}$ si r est le rayon du disque D, soit,

comme $a \in$ l'intérieur du disque D, $\dfrac{|a-b|}{r} = k < 1$.

Mais alors la série de terme général $\left(\dfrac{a-b}{z-b}\right)^n$ converge normalement pour $z = b + r\,e^{it}$ et on a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^n}\right) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)\,(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}}\,dz$$

avec, sur γ, $\left| f(z)\,\dfrac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}} \right| \leq \,||f||_\infty \dfrac{k^n}{r}$, $||f||_\infty$ étant prise sur le compact D.

Cette convergence normale justifie une intégration terme à terme, donc

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\, dz \right) (a-b)^n$$

ce qui prouve qu'en posant

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\, dz \,, \quad \textbf{(1)}$$

on obtient une série entière convergente pour a tel que $|a-b| < r$ (r rayon de γ) : la fonction f est développable en série entière centrée en b.

Comme en fait, pour tout b de l'ouvert Ω, il existe un $r > 0$ tel que le disque fermé de centre b de rayon r soit contenu dans Ω, on aura f développable en série entière en chaque b de Ω.

Quod erat demonstrandum, as Latinists like to say

Mon commentaire __ Les formules **(1)** ***donnant*** a_n sous forme d'intégrale sont très utiles ; *ce sont les formules de Cauchy*.

En toute rigueur, l'hypothèse $f\,'$ continue est en trop, mais la justification des résultats est alors plus délicate. Comme mon propos était de montrer la différence de difficulté entre cas réel et cas complexe, je n'ai pas de scrupule à l'avoir introduite. Ce résultat est fidèle au but que je m'étais fixé : sculpter toute une information opulente dans un noyau de cerise.

Vous avez vu _ je m'adresse évidemment aux étudiants de Master Première année _ l'année dernière (Licence 3e année), une théorie très riche en filigrane de ce que je viens de mettre exergue : fonctions méromorphes, calculs des résidus, séries de Laurent… mais il faut savoir s'arrêter. Pas cependant sans retrouver le théorème dit de d'**Alembert**. Mais d'abord on a

Théorème _ (de **Liouville**) _ Si *f est holomorphe sur le plan, bornée* elle est constante.

The theory of Complex Variables is both a great theoretical achievement and *a unique set of computational tools, a collection of algorithms; and for more than three hundred years, it was the existence of the algorithms, the techniques of thought, that made the application of the Complex Variables possible.*

La théorie des variables complexes est à la fois un grand accomplissement théorique *et* un ensemble exceptionnel d'outils de calcul, une collection d'algorithmes ; et durant plus de trois cents ans, c'est l'existence de ces algorithmes, de ces techniques de pensée, qui a rendu possible l'application des variables complexes.

Je supposerai en fait f dérivable de dérivée continue pour ne pas tricher et n'utiliser que ce que j'ai justifié.

En effet, soit $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ tel que $|z| < r$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, avec (compte tenu de

(1)) $a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}\, d\tau.$

Où γ_r est le cercle de rayon r, centré en 0, donc paramétré par :

$\tau = re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, d'où $a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f(re^{it})}{(re^{it})^{n+1}}\, ir\, e^{it} dt$

soit $a_n \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it})dt$, comme $||f||_\infty$ existe sur le plan, la majoration

$|a_n| \leq \dfrac{2\pi ||f||_\infty}{2\pi r^n} = \dfrac{||f||_\infty}{r^n}$ valable pour tout $r > |z|$: c'est que pour $n \geq 1$ on a

$|a_n| = 0$, (on fait tendre r vers l'infini). Il reste $f(z) = a_0$: elle est constante.

Corollaire _ (Théorème de d'Alembert). Tout polynôme P de degré $n \geq 1$ à coefficient complexes a des racines dans $\mathbb{C}$.

Car P est dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{C}$ donc si P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, la fonction $f : z \longmapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est holomorphe de dérivée continue, or si $|z|$ tend vers $+\infty$,

$\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$, (si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, $f(z) \approx \dfrac{1}{a_n z^n}$ si $|z| \longrightarrow +\infty$)

donc f est bornée sur $\mathbb{C}$, (soit $\varepsilon = 1$, $\exists r$, $|z| \geq r \Rightarrow |f(z)| \leq 1$ puis f continue sur le disque de centre 0 de rayon r, compact, y est bornée). Mais alors f serait constante (théorème de Liouville) donc P aussi ce qui contredit $d^0P \geq 1$.

Corollaire _ Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Car si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré $n \geq 1$, P a un zéro z_1 dans $\mathbb{C}$, il existe Q_1 tel que $P(z) = (z - z_1)Q_1(z)$, avec $d^0Q_1 = d^0P - 1$. Si $d^0Q_1 \geq 1$, on a encore Q_1 admet un zéro z_2, d'où $P(z) = (z - z_2)Q_2(z)$ et on continue ainsi, d'où finalement n zéros distincts ou non pour P de degré n.

That so abstract a consideration should in the end be so lucid is a source of wonder. A great mathematical property reveals its identity in terms of the theorems that it makes possible.

Qu'un sujet aussi abstrait soit pour finir si lumineux ne peut que susciter l'émerveillement. Toute grande propriété mathématique révèle son identité par les théorèmes auxquels elle donne naissance.

Δ !! _ C'est ainsi que la vérité habite la théorie lorsque celle-ci contemple son objet avec une attention sans faille, et lorsque, à l'intérieur du processus d'observation propre à une telle contemplation, elle aperçoit, elle saisit les images, les associations et les suggestions, souvent confuses et contingentes, peut-être erronées, qui sont suscitées par cet objet.

Une école de la lenteur …

Mais, pour parvenir à ce but, il faut de la patience, de l'hésitation, de la simplicité, du dénuement, de la lenteur. Malheureusement, certains étudiants ont perdu ce rapport indispensable à la simplicité, à l'étonnement simple _ s'il est possible qu'il soit simple _ devant une belle théorie. Écoutez, c'est Pascal qui, comme toujours, a tout dit : « Si on arrive à être assis dans une chaise, silencieusement, seul dans une chambre, on a eu une très grande éducation. » Et c'est terriblement difficile.

Mais, là encore, on va dire : ''qu'est-ce qu'il est pénible !'' Souvent je me dis que je ferais mieux de me taire. C'est après tout ce qu'à dit **Wittgenstein** _ et d'autres _ dans toute sa philosophie. Mais je n'ai pas le choix : parler, c'est respirer, c'est le souffle de l'âme. La parole est l'oxygène de notre être. Dans le lycée où j'exerçais mes fonctions de professeur de Classes Préparatoires, je luttais contre son appauvrissement. Chaque cliché est la mort d'une possibilité vitale, chaque belle métaphore ouvre littéralement des portes sur l'être. Alors, c'est la bataille la plus importante, mais il n'est pas du tout évident qu'on va la gagner.

Annexe : Variable Complexe

Dans cette annexe, je donne les démonstrations de deux théorèmes de fonctions holomorphes utilisés (les théorèmes parbleu !) dans cet exposé.

Soit γ un arc paramétré de classe C^1, à support dans $\overline{\Omega}$.

C'est la donnée d'un couple (I, g) avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et g fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}^2$: $t \longmapsto g(t) = (p(t), q(t))$ telle que $\{(p(t), q(t))\ ;\ t \in I\} \subset \overline{\Omega}$. L'ensemble des $p(t) + iq(t)$ est alors dans Ω. On suppose désormais que I est un segment. On appelle *intégrale de f*, (*continue de Ω dans $\mathbb{C}$*) *le long de γ* le scalaire :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_I [\overline{\alpha}(p(t), q(t)) + i\,\overline{\beta}(p(t), q(t))][p'(t) + iq'(t)]dt$$

$$= \int_I [\overline{\alpha}(p(t), q(t))p'(t) - \overline{\beta}(p(t), q(t))q'(t)]dt\ +$$

$$+\ i\int_I [\overline{\alpha}(p(t), q(t))q'(t) - \overline{\beta}(p(t), q(t))p'(t)]dt$$

ces intégrales de fonctions continues sur un segment, I, existent. C'est encore, en termes d'intégrales curvilignes :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma [\overline{\alpha}(x, y)dx - \overline{\beta}(x, y)dy] + i\int_\gamma [\overline{\alpha}(x, y)dy + \overline{\beta}(x, y)dx]$$

Si on suppose f holomorphe, de dérivée continue, par application de la formule de Green Riemann, si γ est le bord orienté $\partial\overline{D}$ d'un domaine $\overline{D}$ contenu dans Ω, limité par des arcs de classe C^1, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial(-\overline{\beta})}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial y}\right)dxdy + i\int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\beta}}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \int\int_{\overline{D}} (-\mu + \mu)dxdy + i\int\int_{\overline{D}} (\lambda - \lambda)dxdy$$

vu la forme de la matrice jacobienne. Donc $\int_{\partial \overline{D}} f(z)dz = 0$. Je viens de justifier le :

Théorème suivant : _ *Si f est holomorphe de dérivée continue sur un ouvert* Ω de $\mathbb{C}$, *et si* $\overline{D}$ *est une partie fermée bornée de* Ω, *de bord orienté* $\partial \overline{D}$, on a $\int_{\partial \overline{D}} f(z)dz = 0$.

On suppose $\overline{D}$ domaine tel qu'on puisse appliquer la formule de Green Riemann. En général $\overline{D}$ est limité par des arcs de classe C^1.

Supposons maintenant qu'une fonction g soit holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ sauf en un point a de Ω, g étant continue sur Ω et g' continue sur $\Omega - \{a\}$.

Soit D un disque fermé avec $a \in$ l'intérieur $D \subset \Omega$, et $\Delta = D$, privé d'un disque de centre a de rayon $\varepsilon > 0$, assez petit pour être contenu dans (l'intérieur du domaine) D. Sur Δ, la fonction g est holomorphe, de dérivée g' continue donc $\int_{\partial\Delta} g = 0$. Or $\partial\Delta$ est formé du bord de D orienté classiquement dans le sens trigonométrique et du bord du disque D_ε de centre a, de rayon ε orienté en sens indirect (rétrograde).
Si on note $\gamma = \partial D$ et $\gamma_\varepsilon = \partial D_\varepsilon$, (sens direct tous deux), on a $\int_{\partial\Delta} g = 0 = \int_\gamma g - \int_{\gamma_\varepsilon} g$, donc $\int_\gamma g = \int_{\gamma_\varepsilon} g$, ce qui laisse supposer que cela ne dépend pas de ε.

Comme g, continue en a, est localement bornée, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une constante M telle que $|z - a| \leq \varepsilon_0$ donne $|g(z)| \leq M$, mais alors, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la longueur du cercle γ_ε étant $2\pi\varepsilon$ on aura $\left|\int_{\gamma_\varepsilon} g\right| \leq 2\pi\varepsilon M$, donc $\left|\int_{\gamma} g\right| \leq 2\pi\varepsilon M$, ceci pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, à la limite $\int_{\gamma} g = 0$.

D'où le théorème : *Si g est holomorphe sur* $\Omega \setminus \{a\}$ *g' étant continue sur* $\Omega \setminus \{a\}$, *pour tout disque D tel que a* $\in$ (l'intérieur de D) $\subset D \subset \Omega$, alors on a $\int_{\partial D} g(z)dz = 0$.

These are very subtle points whose elaboration required the work of centuries _ and this by mathematicians of the highest order. The reader inclined to defer the work required fully to appreciate the definitions/theorems, and to repair back to the text, has my sympathies. He or she will yet be able to appreciate the forward movement of the Complex Variables.

Ce sont là des points très subtils dont l'élaboration a nécessité plusieurs siècles de travail _ et par des mathématiciens de tout premier ordre. Le lecteur enclin à remettre à plus tard les efforts nécessaires pour apprécier pleinement les définitions/théorèmes et à reprendre leur lecture a toute mon indulgence. Il n'en sera pas moins en mesure d'apprécier la marche en avant des fonctions analytiques.

Mais que tout cela est d'une désolante abstraction!

Penser veut dire aussi rêver. Avec joyeuse rigueur, et concrètement. Rêver aux hirondelles sur une terrasse à Crotone. Et à ce qu'elles ont dit. *Per sempre.* _ *Pour toujours.*

Théo Héikay-Universitaire/pdf