Ô lumière amicale _ *O friendly light*
Ô fraîche source de la lumière _ *O fresh source of light*

« O puissance d'imaginer, toi qui nous emportes parfois si loin de nous qu'on ne s'aperçoit pas que sonnent alentour mille trompettes, qui te met en mouvement ? »

DANTE

Estimation de la durée de vie (moyenne) d'un enseignant heurté au mur de l'absence absolue d'intérêt. Il s'agit naturellement des enseignants qui ont perdu la flamme, qui ne ressentent plus charnellement la saveur physique d'une pensée, le goût d'une idée qui s'infiltre dans leur peau pour gagner d'un coup d'aile magique leurs mains, leurs bras et leur visage. Ceux qui, compte tenu des circonstances, ne peuvent plus dire au naturel ce qu'ils disent, ne peuvent plus se livrer à leurs élèves, d'être dans le point de mire de leur attention et de leur écoute, bref des profs brisés (Non, de grâce, ne riez pas, c'est sérieux…)

Une étude récente, faite par un Institut de Recherche Californien, évalue que la durée de vie d'enseignants déprimés, a une distribution exponentielle d'espérance inconnue $\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Pour estimer α, on choisit un échantillon de n enseignants et on observe les instants où les r premières enseignants ne rayonnent plus : $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(r)}$, où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ représentent les durées de vie des n enseignant.

Un « estimateur sans biais » (*e.s.b.*) de $\frac{1}{\alpha}$ est une *v.a.* U = $h(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(r)})$ telle que EU = $\frac{1}{\alpha}$.

Trouver le « meilleur » *e.s.b.* de la forme $U = \lambda_1 X_{(1)} + \lambda_2 X_{(2)} + \ldots + \lambda_r X_{(r)}$, c'est-à-dire combinaison linéaire des observations $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(r)}$. Autrement dit :

Montrer que $\hat{U} = (X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots + X_{(r)})\frac{1}{r} + X_{(r)}\frac{n-r}{r}$ et qu'alors var $\hat{U} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\alpha^2}$.

Précisions

En modélisant cette étude récente, faite par un Institut de Recherche Californien, j'essaie seulement de réfléchir sans trêve sur une inscription dans une culture particulière de mon aspiration à l'universel ; j'essaie par ce risque intellectuel, de comprendre que ma marginalité même au sein de ma culture témoigne de cette culture. Or tout le monde dit toujours la même chose et, le flux de l'influence, descend la plus grande pente ensemble. La modélisation est une façon de faire barrage devant cet écroulement. Victoire sur la mort, elle s'identifie à la vie et il n'y a de vie connue qu'individuelle. Singulière. Originale. À mon avis, il n'est de pensée que libertine, c'est-à-dire affranchie, autonome, indépendante, peu soucieuse de mots d'ordre d'une époque et des modes.

Il me semble qu'il faut chercher passionnément ce que vous êtes et non ce que l'on dit que vous êtes. Mais trouver le contemporain, chose difficile. Découvrir ce que l'on est, invention plus rare encore.

Ma solution

Les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de densité $\alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{\mathrm{IR}^+}(x)$.

On démontrer aisément que les *v.a.* $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ sont indépendantes et de plus $X_{(k)} - X_{(k-1)}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha(n-k+1)$ pour $k = 1, \ldots, n$ (on pose $X_{(0)} = 0$).

Or, on peut écrire

$$U = \lambda_1 X_{(1)} + \ldots + \lambda_k (X_{(1)} + X_{(2)} - X_{(1)} + \ldots + X_{(k)} - X_{(k-1)}) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_r (X_{(1)} + X_{(2)} - X_{(1)} + \ldots + X_{(r)} - X_{(r-1)})$$

D'où

$$U = \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j\Big)(X_{(k)} - X_{(k-1)}).$$

U est alors la somme de r *v.a.* indépendantes.

Par suite :

$$v.a.r.\ U = \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j\Big)^2 \ v.a.r.\ (X_{(k)} - X_{(k-1)}).$$

On a aussi, par linéarité

$$\mathrm{EU} = \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \Big)\, \mathrm{E}(X_{(k)} - X_{(k-1)}).$$

Or

$\mathrm{E}(X_{(k)} - X_{(k-1)}) = \dfrac{1}{\alpha(n-k+1)}$ (espérance d'une loi exponentielle : inverse du paramètre). La variance $V(\beta)$ d'une loi exponentielle de paramètre β est :

$$V(\beta) = \int_0^{+\infty} \beta x^2 e^{-\beta x}\, dx - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2,$$

soit, en intégrant par parties,

$$V(\beta) = \frac{1}{\beta^2}.$$

D'où

$$v.a.r\,(X_{(k)} - X_{(k-1)}) = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{(n+1-k)^2}.$$

Ainsi

$$\text{v.a.r. } U = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \Big)^2 \frac{1}{(n+1-k)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{EU} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=k}^{r} \lambda_j \Big) \frac{1}{n-k+1}$$

Le problème posé est de déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de façon que *v.a.r.* U soit minimum avec $\mathrm{EU} = \dfrac{1}{\alpha}$.

Posons $\nu_k = \dfrac{1}{n-k+1}\displaystyle\sum_{j=k}^{r} \lambda_j$ pour $k = 1, \dots, r$. Le problème consiste donc à déterminer

$\nu_1, \dots, \nu_r$ de façon que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k^2$ minimum.

Soit M le point de coordonnées $\nu_1, \dots, \nu_r$ dans $\mathbb{R}^r$. Alors $OM^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k^2$ est minimum si et seulement si $M = \overline{M}$ est la projection orthogonale de O sur l'hyperplan affine d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \nu_k = 1$.

Comme le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ est orthogonal à cet hyperplan, les coordonnées $\overline{\nu_k}$ de $\overline{M}$ sont $\overline{\nu_1} = \overline{\nu_2} = \dots = \overline{\nu_r} = \dfrac{1}{r}$; ce qui donne :

$$OM^2 = \sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r} \text{ et } \overline{\lambda_r} = \frac{n-r+1}{r}, \quad \overline{\lambda_{r-1}} = \dots = \overline{\lambda_1} = \frac{1}{r}.$$

Ainsi

$$\hat{U} = \overline{\lambda_1}\, X_{(1)} + \dots + \overline{\lambda_r}\, X_{(r)} = \frac{1}{r}\left(X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(r)}\right) + X_{(r)}\,\frac{n-r}{r}$$

est l'unique solution du problème et *v.a.r.* $U = \dfrac{1}{r\,\alpha^2}$.

Quod erat demonstrandum, *as Latinists like to say*.

Mon commentaire

On doit savoir où l'on est et être heureux d'avoir une place, même si elle est petite : quelle joie que de pouvoir mettre dans les boîtes aux lettres de bons messages et d'être sûr qu'ils iront à leurs destinataires !

Théo Héikay